Oct 16 1926
Not to be

Physikalische Zeitschrift

begründet von E. Riecke und H. Th. Simon

vereinigt mit dem

Jahrbuch der Radioaktivität und Elektronik

begründet von Johannes Stark

Herausgeber:

Prof. Dr. **P. Debye**, Prof. Dr. **F. Harms** und Prof. Dr. **R. Seeliger**

Die Physikalische Zeitschrift erscheint monatlich zweimal im Umfange von drei bis vier Bogen und wird vierteljährlich für Goldmark 11.— postfrei geliefert. Für das Ausland beträgt der Preis $ 3.— vierteljährlich. Für die Mitglieder der Deutschen Physikalischen Gesellschaft im Inland Goldmark 9.—, im Ausland $ 2.60. Bestellungen nehmen jede Buchhandlung sowie die Verlagsbuchhandlung entgegen. Anzeigen werden für die einmal gespaltene Millimeterzeile mit Goldmark —.35, Beilagen mit Goldmark 60.— berechnet.

Alle Manuskripte und darauf bezügliche Zuschriften sind an Prof. Dr. F. Harms, Würzburg, Bismarckstr. 1, zu senden, mit Ausnahme der zusammenfassenden Berichte, deren Redaktion Prof. Dr. R. Seeliger, Greifswald, Loitzerstr. 43, führt. Büchersendungen und Anzeigen-Aufträge direkt an den Verlag.

No. 22. Ausgegeben am 15. November 1926. No. 722. Printed in Germany. 27. Jahrgang.

INHALT:

Originalmitteilungen:

A. Rubinowicz, Über die Eindeutigkeit der Lösung der Maxwellschen Gleichungen. S. 707—710.

J. J. Bikerman, Zur elektrostatischen Theorie anomaler Flüssigkeiten. S. 710—711.

H. Schulz, Optische Bestimmung der Dicke einer Oberflächenschicht. S. 711—712.

F. Běhounek, Zur Erwiderung von Herrn Kolhörster in Heft 17 dieser Zeitschrift. S. 712—713.

F. Bernhardt, Umwandlungsversuche von Quecksilber in Gold bei hohen Stromstärken mit Hilfe einer Hochdruckquecksilberbogenlampe. S. 713—715.

C. Schmidt, Eine einfache Bestimmung des Verhältnisses $\mathfrak{H}/\mathfrak{M}$, Horizontalintensität des Erdmagnetismus zum magnetischen Moment eines Stabmagneten. S. 715—716.

H. Jung, Die neueren Vokaltheorien. S. 716—723.

J. Kudar, Schrödingersche Wellengleichung und vierdimensionale Relativitätsmechanik. S. 724.

O. v. Auwers, Bemerkung zu der Arbeit von W. Vogel: „Magnetische Anfangspermeabilität". S. 724—725.

Vorträge und Diskussionen von der 89. Versammlung Deutscher Naturforscher und Ärzte in Düsseldorf:

W. Meißner, Der Widerstand von Metallen und Metallkristallen bei der Temperatur des flüssigen Heliums. S. 725—730.

R. Seeliger, Die Entwicklung des Lichtbogens. S. 730—732.

R. Seeliger, Über die Temperatur des Gases in Entladungsröhren. S. 732—733.

L. Flamm, Beiträge zur Wellenmechanik in nichtstationären Feldern. S. 733—735.

G. Stetter, Massenbestimmung von Atomtrümmern. S. 735—738.

W. Busse, Über die Ionisation bei der langsamen Oxydation von Phosphor. S. 738—741.

E. Reichenbächer, Der Elektromagnetismus in der Weltgeometrie. S. 741—745.

A. Becker, Durchgang korpuskularer Strahlen durch Materie. S. 745—748.

M. A. Schirmann, Die Erzeugung extremster Vakua durch erkaltende hocherhitzbare Metalle als Sorbentien (speziell Wolfram). S. 748—751.

H. Opitz, Über eine optische Täuschung in ihrer Abhängigkeit vom monokularen und binokularen Sehen. S. 751—754.

Besprechungen:

E. Hoppe, Geschichte der Physik. S. 754.

Personalien. S. 754.

VERLAG VON S. HIRZEL IN LEIPZIG

Wissenschaftliche Optik

aus

Kalkspat
Quarz
Flußspat
Gips u. Glimmer
Steinsalz
Glas

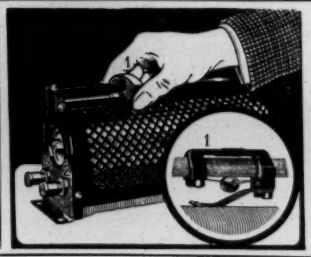
B. Halle Nachfl.
Optische Werkstätten
Berlin-Steglitz.

Überragend
sind unsere überall bekannten
aschefreien Filter Nr. 589 u. 590.

Mit unseren
Rundfiltern
Faltenfiltern
Extraktionshülsen
Filtrirpapieren in Bogen
bilden sie unentbehrliche Hilfsmittel für jedes Laboratorium.

Unsere Preisliste, ein Wegweiser für jeden Interessenten, versenden wir kostenfrei.

Carl Schleicher & Schüll
DÜREN, Rheinl.



Diese ges. gesch. Konstruktion des Kontaktschlittens, sowie die technisch größtmöglichste Isolation ist der Grund für die Bevorzugung der

REO-Rohrwiderstände

HANNS HASE-REO G.m.b.H., BERLIN SW 68.

Physikalische Zeitschrift
1899—1911 gebunden, 1912—1926 geheftet

Jahrbuch der Radioaktivität u. Elektronik
1904—1911 gebunden, 1912—1924 geheftet

aus Privathand zu verkaufen

Angebote an den Verlag der Physikalischen Zeitschrift S. Hirzel, Leipzig C 1, Königstraße 2

PHYSIKALISCHE ZEITSCHRIFT

vereinigt mit dem

JAHRBUCH DER RADIOAKTIVITÄT UND ELEKTRONIK

No. 22. 15. November 1926. Redaktionsschluß für No. 24 am 5. Dezember 1926. 27. Jahrgang.

INHALT:

Originalmitteilungen:

A. Rubinowicz, Über die Eindeutigkeit der Lösung der Maxwellschen Gleichungen. S. 707.

J. J. Bikerman, Zur elektrostatischen Theorie anomaler Flüssigkeiten. S. 710.

H. Schulz, Optische Bestimmung der Dicke einer Oberflächenschicht. S. 711.

F. Běhounek, Zur Erwiderung von Herrn Kolhörster in Heft 17 dieser Zeitschrift. S. 712.

F. Bernhardt, Umwandlungsversuche von Quecksilber in Gold bei hohen Stromstärken mit Hilfe einer Hochdruckquecksilberbogenlampe. S. 713.

C. Schmidt, Eine einfache Bestimmung des Verhältnisses $\mathfrak{H}/\mathfrak{M}$ Horizontalintensität des Erdmagnetismus zum magnetischen Moment eines Stabmagneten. S. 715.

H. Jung, Die neueren Vokaltheorien. S. 716.

J. Kudar, Schrödingersche Wellengleichung und vierdimensionale Relativitätsmechanik. S. 724.

O. v. Auwers, Bemerkung zu der Arbeit von W. Vogel: „Magnetische Anfangspermeabilität". S. 724.

Vorträge und Diskussionen von der 89. Versammlung Deutscher Naturforscher und Ärzte in Düsseldorf:

W. Meißner, Der Widerstand von Metallen und Metallkristallen bei der Temperatur des flüssigen Heliums. S. 725.

R. Seeliger, Die Entwicklung des Lichtbogens. S. 730.

R. Seeliger, Über die Temperatur des Gases in Entladungsröhren. S. 732.

L. Flamm, Beiträge zur Wellenmechanik in nichtstationären Feldern. S. 733.

G. Stetter, Massenbestimmung von Atomtrümmern. S. 735.

W. Busse, Über die Ionisation bei der langsamen Oxydation von Phosphor. S. 738.

E. Reichenbächer, Der Elektromagnetismus in der Weltgeometrie. S. 741.

A. Becker, Durchgang korpuskularer Strahlen durch Materie. S. 745.

M. A. Schirmann, Die Erzeugung extremster Vakua durch erkaltende hocherhitzbare Metalle als Sorbentien (speziell Wolfram). S. 748.

H. Opitz, Über eine optische Täuschung in ihrer Abhängigkeit vom monokularen und binokularen Sehen. S. 751.

Besprechungen:

E. Hoppe, Geschichte der Physik. S. 754.

Personalien. S. 754.

ORIGINALMITTEILUNGEN.

Über die Eindeutigkeit der Lösung der Maxwellschen Gleichungen.

Von A. Rubinowicz.

Der von H. Weber[1]) angegebene Beweis für die Eindeutigkeit der Lösung der Maxwellschen Gleichungen zeigt, daß durch die Vorgabe des Anfangszustandes von $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ in dem ganzen Gebiete, für das die Lösung gesucht wird, für alle folgenden Zeiten in diesem Gebiete die beiden Vektoren $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ eindeutig bestimmt sind. Wenn auch dieser Satz hinreicht, um festzustellen, ob bei einem vorgegebenen Problem eine ins Auge gefaßte Lösung wirklich die gesuchte ist, trägt er für den Physiker doch etwas Unbefriedigendes an sich. Setzen wir etwa den Fall voraus, daß wir es mit einem sich ins Unendliche erstreckenden Gebiete zu tun haben. Da es für den Physiker feststeht, daß sich die elektromagnetischen Zustände mit einer endlichen Geschwindigkeit ausbreiten, so ist es ihm klar, daß zu einer bestimmten Zeit t in einem bestimmten Raumpunkte P die Vektoren $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ nur durch die in einem gewissen endlichen Gebiete liegenden Anfangswerte und Randbedingungen verursacht sein können. Der Eindeutigkeitsbeweis müßte sich demnach so führen lassen, daß er dieser Tatsache Rechnung trägt. Daß dies in der Tat möglich ist, soll im folgenden gezeigt werden. Dieser Nachweis ist für den Physiker deshalb von Interesse, weil er ganz streng und dabei ganz einfach zeigt, daß sich die elektromagnetischen Vorgänge mit der Geschwindigkeit $\frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$ (Frontgeschwindigkeit) ausbreiten.

Wir betrachten im folgenden einen elektromagnetischen Vorgang, der sich im ganzen unendlichen Raume abspielt. Er sei bestimmt durch die Maxwellschen Gleichungen

$$\frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} + \frac{4\pi\sigma}{c}\mathfrak{E} = \operatorname{curl}\mathfrak{H}, \qquad -\frac{\mu}{c}\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t} = \operatorname{curl}\mathfrak{E};$$
$$\operatorname{div}\varepsilon\mathfrak{E} = 4\pi\varrho, \qquad \operatorname{div}\mu\mathfrak{H} = 0, \quad (1)$$

wobei wir voraussetzen, daß ε, μ und σ gegebene stetige Funktionen der Raumkoordinaten x, y, z sind.

Unser Eindeutigkeitsbeweis gründet sich nun ebenso wie der H. Webersche auf eine Anwendung des Energiesatzes (Zeitkomponente der Divergenzrelation des Energie-Impulstensors):

[1]) Riemann-Weber, Die partiellen Differentialgleichungen d. math. Physik, IV. Aufl., Bd. I, S. 390. Braunschweig 1900.

$$\operatorname{div}\mathfrak{S}+\frac{\partial W}{\partial t}=-Q,$$

$$\left(\mathfrak{S}=\frac{c}{4\pi}[\mathfrak{E}\mathfrak{H}],\ W=\frac{\varepsilon}{8\pi}\mathfrak{E}^2+\frac{\mu}{8\pi}\mathfrak{H}^2,\ Q=\sigma\mathfrak{E}^2\right)\quad(2)$$

und unterscheidet sich von dem H. Weberschen nur durch die Wahl des raumzeitlichen Gebietes, über das die Relation (2) integriert wird.

H. Weber integriert (2) über das Gebiet: „Ganzer unendlicher Raum, Zeitintervall zwischen zwei gegebenen Zeitmomenten t_0 und t_1", wo t_0 der Zeit entspricht, für die die Anfangswerte vorgeschrieben sind und $t_1 > t_0$ einen späteren Zeitmoment bezeichnet. Wir wollen dagegen, um dem unerwünschten Ergebnisse zu entgehen, daß die Eindeutigkeit gleichzeitig für den ganzen Raum dargetan wird, (2) über ein in der nachstehenden Weise bestimmtes raumzeitliches Gebiet K integrieren:

Zur Zeit $t=t_0$ denken wir uns im x, y, z-Raume durch $f_0(x, y, z)=0$ ein Gebiet R_0 begrenzt. Im x, y, z, t-Raume errichten wir nun in jedem Punkte $t=t_0$, $f_0(x, y, z)=0$ als Spitze, einen aus geodätischen Nullinien des Linienelementes

$$ds^2=dx^2+dy^2+dz^2-\frac{c^2}{\varepsilon\mu}dt^2$$

bestehenden Lichtkegel, d. h. einen charakteristischen Kegel der Wellengleichung:

$$\frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=\Delta\varphi,\qquad(3)$$

Die Gesamtheit aller dieser Lichtkegel bildet dann zwei Hüllflächen (Wellenflächen), die der Differentialgleichung:

$$(f_x)^2+(f_y)^2+f_z)^2-\frac{\varepsilon\mu}{c^2}(f_t)^2=0\quad\left(f_x=\frac{\partial f}{\partial x},\cdots\right)\quad(4)$$

genügen[1]). Die eine dieser Hüllflächen (sie werde im folgenden einfach mit $f(x, y, z, t)=0$ bezeichnet) ist dann so beschaffen, daß sie für Zeiten, die t_0 nachfolgen ($t>t_0$) aber t_0 hinreichend nahe benachbart sind[1]), für $t=$ const. im x, y, z-Raume einem Gebiete R entspricht, das zur Gänze innerhalb R_0 gelegen ist, während die andere Hüllfläche zu allen Zeiten $t>t_0$ im x, y, z-Raume ein Gebiet begrenzt, das R_0 in seinem Innern enthält.

Wählen wir nun einen t_0 hinreichend benachbarten Zeitmoment $t_1>t_0$, so wollen wir als Gebiet K den von $t=t_0$, $t=t_1$ und $f(x, y, z, t)=0$, im x, y, z, t-Raume begrenzten Bereich bezeichnen. Das durch $f(x, y, z, t_1)=0$, also durch die Wellenfläche zur Zeit t_1 im x, y, z-Raume begrenzte Gebiet heiße dann R_1. Ein besonders einfaches Raumgebiet K erhalten wir, falls wir für f einen Lichtkegel wählen. Der Raum K besteht in diesem Falle sozusagen aus einem vierdimensionalen Kegelstumpf.

Wir integrieren nun (2) über irgendein solches Gebiet K und erhalten:

$$\int_K\left(\operatorname{div}\mathfrak{S}+\frac{\partial W}{\partial t}\right)d\tau=-\int_K Q\,d\tau$$

$$(d\tau=dx\,dy\,dz\,dt).$$

Bezeichnen wir mit F die gesamte Begrenzung von K und wenden auf die linke Seite der letzten Relation den Gaußschen Satz an, so wird:

$$\int_F(S_x\cos(N,x)+S_y\cos(N,y)+S_z\cos(N,z)+$$
$$+W\cos(N,t))\,dF=-\int_K Q\,d\tau,\qquad(5)$$

wo dF ein Element der Begrenzung F und N die zugehörige äußere Normale bedeutet.

Das in (5) auftretende Flächenintegral (es heiße I) wollen wir nun für die einzelnen Begrenzungsflächen, aus denen F besteht, berechnen. Bezeichnen wir mit R_0, R_1 und F_L die Teile von F, die in den Ebenen $t=t_0$, $t=t_1$ und in der Fläche $f(x, y, z, t)=0$ gelegen sind und dementsprechend mit I_{t_0}, I_{t_1} und I_{F_L} die Anteile, die diese Flächenstücke zu I beisteuern, so wird:

$$I=I_{t_0}+I_{t_1}+I_{F_L}$$

1) Ohne ausdrückliches Zurückgreifen auf die Charakteristikentheorie läßt sich die Differentialgleichung (4) wie folgt ableiten: Nimmt man an, daß $v=c/\sqrt{\varepsilon\mu}$ die Geschwindigkeit darstellt, mit der eine Wellenfläche

$$f(x, y, z, t)=0$$

senkrecht zu ihrer Normalenrichtung im x, y, z-Raume (Huygenssches Enveloppenprinzip) fortschreitet, so werden die Komponenten v_x, v_y, v_z von v gegeben durch

$$(a)\qquad v_x=v\cdot f_x/(f_x^2+f_y^2+f_z^2)^{1/2},\cdots$$

Liegt nun ein Punkt x, y, z auf der Wellenfläche

$$f(x, y, z, t)=0,$$

so muß, wenn die Wellenfläche in der Richtung ihrer Normalen im x, y, z-Raume mit der Geschwindigkeit v fortschreitet, auch der Punkt

$$x+v_x dt,\ y+v_y dt,\ z+v_z dt,\ t+dt$$

auf der Wellenfläche liegen, d. h. der Gleichung

$$f(x+v_x dt,\ y+v_y dt,\ z+v_z dt,\ t+dt)=0$$

genügen. Daraus folgt aber unmittelbar die Relation

$$f_x v_x+f_y v_y+f_z v_z+f_t=0,$$

die mit Rücksicht auf (a) die Differentialgleichung (4) ergibt.

1) Eine solche Wellenfläche verkleinert sich zunächst mit wachsender Zeit, um sich dann sozusagen umzustülpen und sich dann wieder zu vergrößern. Der x, y, z, t-Raum wird daher durch die Wellenfläche $f(x, y, z, t)=0$ in drei Gebiete geteilt, die im Spezialfalle, wo $f(x, y, z, t)=0$ durch einen Lichtkegel gegeben wird, dem vom Vor- und Nachkegel eingeschlossenen Raume und dem Zwischengebiete entsprechen. Die Einschränkung, t sei hinreichend nahe an t_0 gelegen, soll dann bedeuten, daß $t=$ const. den dem Nachkegel entsprechenden Teil von $f(x, y, z, t)=0$ schneidet. Das durch $t=$ const. im x, y, z-Raume bestimmte Gebiet R soll dabei ausschließlich durch die Punkte dieses Teiles der Fläche $f(x, y, z, t)=0$ begrenzt werden.

und wir erhalten für die drei rechts stehenden Integrale die folgenden Ausdrücke:

1. In der Ebene $t = t_0$ ist: $\cos(N, x) = \cos(N, y) = \cos(N, z) = 0$, $\cos(N, t) = -1$ und $dF = dx\,dy\,dz$. Daher wird:

$$I_{t_0} = -\int_{K_0} W_{t_0}\,dx\,dy\,dz. \tag{6}$$

2. In der Ebene $t = t_1$ wird analog:

$$I_{t_1} = +\int_{K_1} W_{t_1}\,dx\,dy\,dz. \tag{7}$$

3. In der Fläche $f(x, y, z, t) = 0$ ist es notwendig, die Verhältnisse ein wenig näher zu betrachten. Zunächst haben wir mit Rücksicht auf (4):

$$\left.\begin{aligned} \cos(N, x) &= \frac{f_x}{(f_x^2 + f_y^2 + f_z^2)^{1/2}} = \\ &= \frac{f_x}{f_t\left(\frac{\varepsilon\mu}{c^2} + 1\right)^{1/2}}, \dots, \\ \cos(N, t) &= \frac{-1}{\left(\frac{\varepsilon\mu}{c^2} + 1\right)^{1/2}}. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Die ersten drei dieser Ausdrücke lassen sich nun durch die Richtungskosinus im x, y, z-Raume ausdrücken. Die Fläche $f = 0$ schneidet den x, y, z-Raum zur Zeit t in einer zweidimensionalen Fläche F_t, die durch $F_t \equiv f(x, y, z, t) = 0$ gegeben wird, falls man hier t als Konstante ansieht. Die Richtungskosinus der äußeren Normalen n an diese Fläche sind nun mit Rücksicht auf (4) bestimmt durch:

$$\cos(n, x) = \frac{f_x}{(f_x^2 + f_y^2 + f_z^2)^{1/2}} = \frac{f_x}{f_t\frac{\sqrt{\varepsilon\mu}}{c}}, \dots$$

Es wird daher:

$$\cos(N, x) = \cos(n, x)\,\frac{1}{\left(1 + \frac{c^2}{\varepsilon\mu}\right)^{1/2}}, \dots$$

Bezeichnen wir mit $d\sigma$ das Oberflächenelement der Fläche F_t im x, y, z-Raume, so ist

$$dF = d\sigma\,dt/\sin(N, t)$$

oder nach (8):

$$dF = d\sigma\,dt\left(1 + \frac{c^2}{\varepsilon\mu}\right)^{1/2}.$$

Somit ergibt sich:

$$I_{F_t} = \int_{t_0}^{t_1} dt \int_{F_t} \left(\mathfrak{S}_n + \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}} W\right) d\sigma. \tag{9}$$

Die Relation (5) geht daher nach (6), (7) und (9) über in:

$$\left.\begin{aligned} &-\int_{K_0} W_{t_0}\,dx\,dy\,dz + \int_{K_1} W_{t_1}\,dx\,dy\,dz + \\ &+ \int_{t_0}^{t_1} dt \int_{F_t} \left(\mathfrak{S}_n + \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}} W\right) d\sigma + \\ &+ \int_K Q\,dx\,dy\,dz\,dt = 0. \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Bemerken wir nun, daß $\frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}} W - |\mathfrak{S}| \geq 0$ ist, und daher in der letzten Beziehung alle Terme mit Ausnahme des ersten positiv sind, so läßt sich nach dem üblichen Verfahren sogleich schließen, daß durch die zur Zeit t_0 in dem endlichen Gebiete K_0 vorgegebenen Anfangswerte die beiden Vektoren $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ zur Zeit t_1 in dem Gebiete K_1 eindeutig bestimmt sind. Nehmen wir nämlich an, daß es zwei Lösungen $\mathfrak{E}_1, \mathfrak{H}_1$ und $\mathfrak{E}_2, \mathfrak{H}_2$ gäbe, die beide dem gleichen Anfangszustande zur Zeit t_0 in K_0 entsprächen und setzen wir $\mathfrak{E}_1 - \mathfrak{E}_2 = \mathfrak{E}^*$, $\mathfrak{H}_1 - \mathfrak{H}_2 = \mathfrak{H}^*$, so bilden $\mathfrak{E}^*, \mathfrak{H}^*$ eine Lösung der Maxwellschen Gleichungen, auf die die Relation (10) anwendbar ist. Versehen wir nun die in (10) auftretenden Größen, falls sie mit $\mathfrak{E}^*$ und $\mathfrak{H}^*$ gebildet werden, mit einem Stern, so gilt mit Rücksicht auf $W^*|_{t_0} = 0$ die Relation:

$$\int_{K_1} W^*_{t_1}\,dx\,dy\,dz - \int_{t_0}^{t_1} dt \int_{F_t} \left(\mathfrak{S}^* + \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}} W^*\right) d\sigma + \int_K Q^*\,dx\,dy\,dz\,dt = 0.$$

Diese Beziehung kann aber nur bestehen, wenn alle Integranden in ihren Integrationsgebieten verschwinden. Insbesondere muß also in K_1 der Ausdruck $W^*|_{t_1} = 0$ sein, d. h. es müssen zur Zeit t_1 in dem Raume K_1 die beiden Vektoren $\mathfrak{E}^*$ und $\mathfrak{H}^*$ verschwinden. Damit ist das nachstehende Eindeutigkeitstheorem bewiesen:

Durch die zur Zeit t_0 in dem Raume K_0 vorgegebenen Anfangswerte von $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ sind zur Zeit $t_1 \geq t_0$ die Werte dieser beiden Vektoren eindeutig bestimmt in einem Raume K_1, der zur Zeit t_1 von der Wellenfläche begrenzt wird, die von der Begrenzung von K_0 zur Zeit t_0 mit der Geschwindigkeit $\frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$ nach dem Inneren dieses Raumes fortzuschreiten beginnt.

Hat man irgendein geeignetes $t_1 > t_0$ gewählt, so kann man zur Abgrenzung des Raumes K auch jedes der Ungleichung $t_1 \geq t_1' > t_0$ entsprechende t_1' verwenden. Daraus folgt aber, daß die Lösung der Maxwellschen Gleichungen (1) im x, y, z, t-Raume in dem

ganzen Gebiete K durch die zur Zeit t_0 in dem Raume R_0 vorgegebenen Anfangswerte eindeutig bestimmt ist. Insbesondere ergibt sich im Falle, wo wir für die Fläche einen Lichtkegel wählen, daß $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ im ganzen Innern eines Kegels eindeutig festgelegt sind, dessen Mantelfläche aus dem Nachkegel und dessen Basis aus den im Innern dieses Nachkegels gelegenen Punkten $t = t_0$ gebildet wird, wenn auf der Basis die Anfangswerte vorgeschrieben sind.

Schließlich sei noch bemerkt, daß sich alle Verallgemeinerungen (z. B. Auftreten von Lichtquellen, Randbedingungen, von Unstetigkeiten in den Materialkonstanten und Anfangswerten) der obigen Überlegungen auf dem gleichen Wege wie beim H. Weberschen Beweise durchführen lassen.

(Eingegangen 17. September 1926.)

Zur elektrostatischen Theorie anomaler Flüssigkeiten.

Von J. J. Bikerman.

Als die wichtigsten Anomalien der „assoziierenden" Flüssigkeiten dürfen wohl ihre zu geringe Oberflächenspannung (Abweichung von des Eötvösschen Regel) und ihr zu geringer Dampfdruck (Abweichung von der van der Waalsschen Regel) gelten. Eine gleichzeitige Herabsetzung der Dampf- und Oberflächenspannung einer Flüssigkeit tritt aber — wie bekannt — auf, wenn ihre Oberfläche elektrisiert wird[1]). Es lag also die Annahme nahe, daß die „assoziierenden" Flüssigkeiten sich von den normalen durch gar keine Assoziation unterscheiden, vielmehr dadurch, daß ihre Oberfläche Sitz eines zur Oberfläche senkrechten elektrischen Feldes ist[2]). Die Berechnung wurde früher für den Fall durchgeführt, daß die Dielektrizitätskonstante unendlich groß ist und das elektrische Feld dementsprechend völlig in der Dampfphase liegt. Im Folgenden wird angenommen, daß die Dielekrizitätskonstante der Flüssigkeit einen endlichen Wert ε hat und daß das elektrische Feld bzw. sein die Oberflächenspannung beeinflussender Anteil sich in der Flüssigkeit befindet.

Unter diesen Bedingungen beträgt der aus der Flüssigkeit nach außen wirkende Druck

$$q = \frac{\varepsilon\,(\varepsilon - 1)}{8\pi} \cdot \mathfrak{E}^2 \qquad (1)$$

($\mathfrak{E}$ = Feldstärke). Der der Oberflächenspannung entgegenarbeitende senkrecht zum Feld gerichtete Druck ist $\frac{\varepsilon}{8\pi} \cdot \mathfrak{E}^2$, so daß die vom Feld herrührende Verminderung der Oberflächenspannung

$$\gamma_e = \frac{\varepsilon}{8\pi} \cdot \mathfrak{E}^2 \cdot \delta \qquad (2)$$

ist, wenn δ die Dicke der Oberflächenschicht bedeutet.

Die Verbindung zwischen q und γ_e einerseits und den beobachteten Anomalien der „assoziierenden" Flüssigkeiten andererseits wird (wie früher) durch die Beziehungen

$$\frac{RT}{V_0} \ln \frac{p_1}{p_0} = q - \frac{\beta}{2} q^2$$

und

$$\gamma' = \gamma_0 - \gamma_e$$

hergestellt. R = die Gaskonstante pro Mol, T die absolute Temperatur, V_0 das Molvolumen bei T, β die Kompressibilität, p_1 die tatsächliche Dampfspannung, p_0 die Dampfspannung der normalen Substanz unter gleichen Bedingungen, γ' die tatsächliche Oberflächenspannung, γ_0 die Oberflächenspannung der normalen Substanz unter gleichen Bedingungen. Bezüglich der (ziemlich hypothesenfreien, aber nicht sehr genauen) Berechnung von p_0 und γ_0 muß auf die frühere Abhandlung verwiesen werden.

In der nachstehenden Tabelle findet man die sich aus (1) und (2) ergebenden $\mathfrak{E}$- und δ-Werte, sowie ihr Produkt, d. h. die Potentialdifferenz zwischen der Flüssigkeit und ihrem Dampf, $\mathfrak{E} \cdot \delta = \varphi$, und schließlich die Größe $\varphi/(\varepsilon - 1)$, die nach der Coehnschen[1]) Regel temperaturunabhängig sein soll.

Die Berechnungen erstrecken sich auf schon früher besprochene Alkohole und auf das ganze Temperaturgebiet, für welches die Dielektrizitätskonstanten bestimmt sind bzw. durch Interpolation ermittelt werden können.

T	$q \cdot 10^{-8}$ dyn/qcm	γ_e dyn/cm	$\mathfrak{E}$ el.-stat. Ein.	$\delta \cdot 10^7$ cm	φ Volt	$\varphi/(\varepsilon-1)$
			Methylalkohol			
273	7,13	20,2	3880	9,63	1,12	0,035
293	6,57	17,3	4190	7,95	1,00	0,033
			Äthylalkohol			
273	7,25	11,6	4810	4,41	0,637	0,023
283	6,875	10,8	4950	4,00	0,608	0,023
293	6,47	9,95	5100	3,77	0,577	0,024
303	6,08	9,1	5260	3,45	0,543	0,024
313	5,64	8,2	5370	3,15	0,507	0,023
323	5,225	7,35	5480	2,87	0,472	0,023
333	4,83	6,5	5570	2,59	0,435	0,023
			n-Propylalkohol			
273	6,58	8,95	5290	3,24	0,514	0,022
293	5,83	7,6	5580	2,76	0,462	0,022

1) G. Lippmann, Ann. chim. phys (5) **5**, 494, 1875; R. Blondlot, Journ. de Physique (2) **3**, 442, 1884; N. Schiller, Wied. Ann. (3) **53**, 396, 1894.

2) J. J. Bikerman, Zeitschr. f. physik. Chemie **104**, 55, 1923.

1) Coehn und Raydt, Ann. der Physik (4) **30**, 797, 1909.

Nach den Formeln (1) und (2) berechnete δ sind $(\varepsilon - 1)$ mal größer, als die früher gefundenen; sie rücken daher aus den Molekulardimensionen in die eher passenden der Dicken von elektrischen Doppelschichten und von Oberflächenschichten[1]). φ haben sich nur wenig verändert und bleiben deswegen in der richtigen Größenordnung elektrokinetischer Potentialdifferenzen. Die Temperaturkonstanz von $\varphi/(\varepsilon - 1)$ wird bestätigt.

Aus der Formel (1) folgt übrigens, daß das normale Verhalten „normaler" Flüssigkeiten mit der Existenz eines Oberflächenfeldes von der Größe des für die „assoziierenden" Substanzen berechneten gut vereinbar ist, wenn nur die ε des normalen Stoffes klein ist, was im allgemeinen ja zutrifft.

1) S. bei Freundlich, Kapillarchemie, 2. Aufl., S. 419 ff.

Berlin, Deutsche chem. Ges.

(Eingegangen 30. September 1926.)

Optische Bestimmung der Dicke einer Oberflächenschicht.

Von H. Schulz.

Kürzlich haben die Herren Sissingh und Groosmuller in dieser Zeitschrift[1]) eine Erweiterung der Theorie der Oberflächenschichten gegeben, die an die Drudeschen Arbeiten anschließt, und vor allem die experimentell beobachtete Differenz zwischen Polarisationswinkel I' und Haupteinfallswinkel I erklären soll. Dies ist durch Berücksichtigung der zweiten Potenzen von d/λ, also des Verhältnisses der Dicke der Oberflächenschicht zur Wellenlänge, auch gelungen. Auf diese Möglichkeit ist schon durch Kynast[2]) hingewiesen worden, doch habe ich bereits im Jahre 1916[3]) darauf aufmerksam gemacht, daß die von Rayleigh[4]) beobachtete Umwandlung von „positiver" Reflexion in „negative" durch Druck, nicht durch die Wirkung isotroper Oberflächenschichten verursacht sein kann und die im Anschluß an Rayleighs Beobachtungen ausgeführten Arbeiten von Lummer und Sorge[5]), sowie von Volke[6]) haben den Zusammenhang mit molekularen Druckwirkungen vermuten lassen, die in den Drudeschen Annahmen unberücksichtigt geblieben sind. Die Annahme anisotroper Oberflächenschichten ist auch schon von Schmidt[1]) und Hebeker[2]) gemacht worden.

Setzt man aber das Vorhandensein von Molekularspannungen in der Oberfläche voraus, so findet man ohne weitere Annahmen für den Haupteinfallswinkel

$$\operatorname{tg} I = n\left|1 - \frac{k}{1+n^2}\left[n^2(p-\mu[p+q])+q-2\mu p\right]\right| \qquad (1)$$

wobei k eine Konstante ist, die die Kompression in der Grenzfläche darstellt, μ die Querkontraktion ist und p und q die Neumannschen elastisch-optischen Konstanten darstellen, die für die Bleiglasreihe mit ausreichender Genauigkeit bekannt sind.

Für den Elastizitätskoeffizienten ε_0 ergibt sich eine Abhängigkeit vom Einfallswinkel in der Form

$$\varepsilon_0 = \frac{\sqrt{1+n^2}}{2(1-n^2)}\left|(q-p)(\mu+1)\left(1-\frac{2\sin^2\alpha}{n^2}\right)\right. \\ \left. +[p-\mu(q+p)]n^2-1)\right|\int\frac{K(x)\,dx}{\lambda}\Bigg| \qquad (2)$$

oder für den Polarisationswinkel

$$\varepsilon_0 = -\frac{1}{2\sqrt{1+n^2}}\left|n^2[p-\mu(q+p)]\right. \\ \left. +q-2\mu p\right|\int\frac{K(x)\,dx}{\lambda}. \qquad (2a)$$

Da nun für das von Sissingh und Groosmuller benutzte Flintglas durch Interpolation aus den Pockelsschen Werten

$$\mu = 0{,}223 \\ p = 0{,}326 \\ q = 0{,}240$$

wird und näherungsweise

$$k\,d > \int K(x)\,dx \sim \frac{k\,d}{2}$$

gesetzt werden kann, so wird

$$\operatorname{tg} I = n\left|1 + \frac{8\lambda\varepsilon_0}{3d\sqrt{1+n^2}}\right| \qquad (3)$$

und für eine mittlere Wellenlänge ($\lambda = 589$ mm)

$$\varepsilon_0 = -\frac{k\,d}{\lambda}\cdot 0{,}1219. \qquad (4)$$

Unter Verwendung der Beobachtungsergebnisse für das polierte Flintprisma ergibt sich

1) R. Sissingh und J. Th. Groosmuller, Physik. Zeitschr. **27**, 518—522, 1926.
2) R. Kynast, Inaug.-Diss. Breslau 1906.
3) H. Schulz, Verhandlungen d. Deutsch. Phys. Ges. 1916, S. 384—396.
4) Lord Rayleigh, Phil. Mag. (6) **16**, 144, 1908.
5) O. Lummer und K. Sorge, Ann. d. Phys. (4) **31**, 323—342, 1910.
6) M. Volke, Inaug.-Diss. Breslau 1909; Ann. d. Phys. (4) **31**, 609—632, 1910.

1) K. E. F. Schmidt, Wied. Ann. **51**, 417, 1894; **52**, 75, 1894; **53**, 769, 1894.
2) O. Hebeker, Inaug.-Diss. Göttingen 1912.

dann für die Dicke d der natürlichen Oberflächenschicht

bei $\lambda = 657$ mm $\quad d = 2{,}99 \cdot 10^{-6}$ mm
bei $\lambda = 480$ mm $\quad d = 0{,}84 \cdot 10^{-6}$ mm.

Die mit Hilfe von Formel (3) erhaltenen Werte von d sind also mit denen der angegebenen Arbeit nahezu identisch, obwohl für die Ableitung der Formeln ganz verschiedene Voraussetzungen gemacht worden sind.

Schon der bei beiden Berechnungsarten auftretende Unterschied der Werte d für verschiedene Wellenlänge dürfte darauf schließen lassen, daß weder die natürlichen Oberflächenschichten, noch die künstlichen, durch Adhäsion bedingten allein genügen, um das Phänomen zu erklären, vielmehr müßte stets mit gleichzeitiger Einwirkung beider gerechnet werden. Eine Entscheidung darüber, wie weit die Ursachen wirksam sind, könnte am besten durch Untersuchung von Körpern mit möglichst verschiedenem Brechungsindex getroffen werden, da die Wirkung der natürlichen Oberflächenschicht für $n \sim 1{,}44$ unmerklich werden müßte, da der Elliptizitätskoeffizient für diesen Wert von n verschwindet, der eigenartigerweise auch für den Mittelwert des Brechungsindex der Oberflächenschicht bei starker Elliptizität rechnerisch sich ergibt.

Auf ein weiteres Eingehen auf diese Fragen möchte ich vorläufig verzichten, da es mir nur darum zu tun war, auf die in den letzten Jahren erschienenen Arbeiten, die von den Herren Sissingh und Groosmuller nicht erwähnt worden sind, hinzuweisen.

(Eingegangen 30. September 1926.)

Zur Erwiderung von Herrn Kolhörster in Heft 17 dieser Zeitschrift.

Von Franz Behounek.

Wie bekannt habe ich in dieser Zeitschrift[1]) Resultate meiner Messungen von Bleiabsorptionskoeffizienten der sog. durchdringenden Strahlung der Atmosphäre („Hesssche Strahlung") veröffentlicht. Nach diesen Resultaten hat sich der betreffende Koeffizient innerhalb der angegebenen Grenzen der Meßgenauigkeit als gleich dem der radioaktiven Induktionen erwiesen. Dieses Resultat stimmte mit dem von Hoffmann und auch von Millikan überein, da es in seiner Interpretation bedeutet, daß die durchdringende Strahlung der Atmosphäre, wenn sie existiert — was heute als bewiesen angesehen werden kann —, in einer Seehöhe von 739 m nicht eine solche Intensität — nämlich von 2 Ionen — wie gewöhnlich angegeben, sondern höchstens die Hälfte davon hat. Damit stehen nicht nur die zwei zitierten Arbeiten nämlich von Millikan und Hoffmann im Einklang, sondern auch die früheren Druckkammerversuche von Swann und Fruth[1]), die ausdrücklich betonen, daß der sog. Höhenstrahlung ein Ionisationseffekt von höchstens 1 I zugeschrieben werden kann. Herr Kolhörster sucht nun zu zeigen, daß die Bleiabsorptionsversuche bisher keine eindeutigen Resultate gegeben haben und führt in seiner Erwiderung (in der er mich unter anderem auch auf einige, bereits von mir zitierte Arbeiten, aufmerksam macht) im ganzen 8 Aufsätze gegen mich an. Ich will nur folgende Bemerkungen machen:

1. Aus einer einzigen Arbeit, die nur als Bericht (wie Herr Kolhörster, loc. cit. selbst gesteht) veröffentlicht wurde und die noch so sonderbare Resultate gebracht hatte, wie die Arbeit von Gish, zu folgern, daß die Bleiabsorptionsversuche nicht eindeutig sind, kann wohl nicht berechtigt erscheinen.

2. Die erste Hoffmannsche Arbeit[2]) führte zum Resultat, daß die Höhenstrahlung im Meeresniveau mindestens achtmal kleiner an Intensität sein muß, als angenommen[3]). In der zweiten Arbeit[4]), die sich wesentlich nur mit dem Streuungseffekte des Wassers für den Durchgang der γ-Strahlung von *RaC* beschäftigt, wiederholt Hoffmann in Hinsicht der durchdringenden Strahlung nur das Resultat der vorigen Arbeit und setzt die Intensität dieser Strahlung auf nur 0,1 I im Meeresniveau herab. Die Notiz von Hoffmann in den „Naturwissenschaften"[5]) ist in keinem Widerspruch mit den beiden vorigen Arbeiten von Hoffmann, was die Größe des Effektes der Höhenstrahlung anbelangt. Übrigens ist die Notiz nur Anzeige einer experimentellen Arbeit, die erst erscheinen soll[6]). Ob man von den Hoffmannschen Arbeiten, die unter anderem auch mit derzeit empfindlichstem Elektrometer durchgeführt wurden, sagen kann, daß sie

1) Physik. Zeitschr. **27**, 8, 1926.

1) Swann, Bull. Nat. Res. Conc. vol. 5, Nr. 17, S. 69, 1922 und Fruth, Phys. Rev. **22**, 109, 1923.

2) Hoffmann, Physik. Zeitschr. **26**, 669, 1925.

3) Hoffmann nimmt dabei noch nur 1,4 I als Intensität der ungeschwächten Höhenstrahlung im Meeresniveau an, obwohl Herr Kolhörster einen höheren Wert, nämlich rund 2 I, angibt (W. Kolhörster, Die durchdringende Strahlung in der Atmosphäre, S. 58 u. 59, Hamburg 1924).

4) Hoffmann, Physik. Zeitschr. **27**, 291, 1926.

5) Herr Kolhörster meint wohl die Notiz aus dem 25. Heft d. J. (S. 622) der „Naturwissenschaften", da im 14. Heft nichts von Hoffmann enthalten ist.

6) Diese Arbeit ist während der Korrektur erschienen (Ann. d. Phys. (IV) **80**, 779, 1926) und hat die früheren Resultate Hoffmanns bestätigt.

„keine eindeutigen Ergebnisse geliefert hätten" überlasse ich unter Verweisung auf die Originalarbeiten der Beurteilung des Lesers selbst.

Da für die Klärung des Problems, welches die Höhenstrahlung der Atmosphäre noch immer vorstellt, nur die Frage der Eindeutigkeit der Bleiabsorptionsversuche vom Nutzen ist, halte ich die Antwort auf die übrigen Abschnitte der Erwiderung von Herrn Kolhörster für zwecklos.

Prag, Staatl. Radiologisches Institut, den 10. September 1926.

(Eingegangen 14. September 1926.)

Umwandlungsversuche von Quecksilber in Gold bei hohen Stromstärken mit Hilfe einer Hochdruckquecksilberbogenlampe.

Von Fritz Bernhardt.

Der Quecksilberlichtbogen unter höherem Druck ist bisher in der Bogenlampe von Heraeus verwirklicht worden. Diese Lampen brennen unter einem maximalen Druck von 4 Atm. bei durchschnittlich 250 Volt und einem Potentialgefälle von 21 Volt/cm. Die Spannung kann bis 400 Volt und die Stromstärke bis 6,5 Amp. gesteigert werden. Die Temperatur ist durch die angelegte Spannung zu regulieren, kann aber nicht bis zur Schmelztemperatur des Quarzglases gesteigert werden, da das Gefäß außerdem noch den Innendruck auszuhalten hat. Dieser Dampfdruck ist hierbei eine Funktion der Temperatur, kann also nicht unabhängig von der Temperatur reguliert werden. Er ist nach oben hin durch die Innendruckfestigkeit des Quarzglases beschränkt.

Die zu besprechende Hochdrucklampe besteht im wesentlichen aus einem mit Quecksilber gefüllten U-förmig gebogenen Quarzglasrohr, dessen Schenkelverbindungsstelle zu einer Kapillaren (inneres Lumen 2 mm) verengt ist. In die U-Rohrschenkel werden 2 Elektroden eingeführt. Dieses U-Rohr, das also in dieser Form der bekannten Jänickelampe, die bei Atmosphärendruck brennt, gleicht, wird nun in einer Stahlbombe, wie sie von mir an anderer Stelle[1]) beschrieben worden ist, unter allseitigen Flüssigkeits- oder Gasdruck gebracht. Legt man an die offenen Schenkel des U-Rohres eine Stromquelle, deren Zuführungen drucksicher und isoliert durch den Bombenkopf geführt werden, so entsteht in der U-Rohrkapillaren ein Lichtbogen, dessen Temperatur durch die angelegte Spannung, und dessen Druck durch eine mit der Bombe in Verbindung stehende Pumpe unabhängig von der Temperatur reguliert werden kann. Da hierbei das Quarzglas des U-Rohres unter allseitigem Druck steht, kann dieser beliebig bis zur Druckfestigkeit der Stahlbombe, also bis zu einigen tausend Atm. gesteigert werden. Die Temperatur läßt sich bis zur Schmelztemperatur des U-Rohrmateriales unter diesen Drucken steigern. Auf diese Weise kann man den Lichtbogen auch mit hoher Stromstärke beschicken, sofern man nur den Kapillaren des U-Rohres die passende Form gibt. Die Umbiegestellen der U-Rohrschenkel müssen aus besonders dick geblasenem Quarz bestehen, und die kapillare Einschnürung muß sehr gleichmäßig geblasen werden, damit der Lichtbogen beim Zünden sich immer an derselben Stelle bildet und gleichmäßig brennt. Andernfalls zersprengt er sofort die Kapillare. Aus diesem Grunde mußten sehr viele U-Rohre ausprobiert werden. Es gelang schließlich, die U-Rohre so herzustellen, daß man den Lichtbogen beliebig lange brennen lassen konnte; z. B. hat der Lichtbogen in einem Falle $15^1/_2$ Stunden ununterbrochen gebrannt. Der Lichtbogen brannte durchschnittlich unter einem Druck von 600 kg/cm² bei 6 Volt und 400 Amp. Die Länge des Lichtbogens betrug 0,2—0,15 cm; es herrschte also ein Potentialabfall von 30—40 Volt/cm. Der Druck beeinflußte die Elektrodenspannung und die Stromstärke derart, daß eine Drucksteigerung von 1 kg/cm² einen Spannungszuwachs von 0,01 Volt und eine Stromstärkeverminderung von 0,3 Amp. verursachte. Diese Schwankungen konnten aber durch entsprechendes Druckablassen vermieden werden. Der Lichtbogen brannte mit Wechselstrom, der einem Maschinenaggregat entnommen wurde, welches in der oben erwähnten Arbeit beschrieben wurde. Man konnte auch einen abreißenden Lichtbogen einstellen, sofern man nur mit der Minimalspannung arbeitete. Dann entstanden durch das erneute periodische Einsetzen des Lichtbogens beträchtliche Schwankungen bis zu 0,5 Volt und 30 Amp.

Diese Zustände des Quecksilberlichtbogens erschienen nun günstig für Umwandlungsversuche von Quecksilber in Gold. Man konnte vor allen Dingen feststellen, ob die außergewöhnlich hohen Stromstärken einen wesentlichen Einfluß auf die Umwandlung haben. Ferner hatte man langsame Elektronen, einen abreißenden, also stark schwankenden Wechselstromlichtbogen und eine höhere Dampfdichte des Quecksilbers. Es waren alle die Faktoren, die nach Miethe von Einfluß auf die Umwandlung sein sollen, bedeutend vergrößert. Infolgedessen war es möglich, die Ampèrestundenzahl, die nach

[1]) F. Bernhardt, Physik. Zeitschr. **26**. 265. 1925.

der neuesten Veröffentlichung von Miethe-Stammreich[1]) den Haupteinfluß auf die Umwandlung haben soll, beträchtlich zu steigern. Diese Zahl konnte bis auf 2125 Ampèrestunden gesteigert werden, während Miethe über Versuche bis zu 50 Ampèrestunden berichtet. Diese Versuche wurden folgendermaßen durchgeführt:

300 g „Kahlbäumquecksilber wurden einer zweimaligen Vakuumdestillation unterworfen. Der Destillationsapparat wurde vorher sorgfältig mit Salpetersäure und Königswasser gereinigt. Die erste Destillation erfolgte mit einer Wasserstrahlpumpe bei 200°; der Rückstand ergab noch minimale Spuren von Gold. Es wurde deshalb ein zweites Mal destilliert und zwar bei 120°. Das Destillat wurde dann halbiert und die eine Hälfte dem Blindversuch unterworfen. Das Quecksilber wurde in halogenfreier verdünnter Salpetersäure bei schwacher Erwärmung bis zu einem kleinen Tropfen von ca. $^1/_2$ mm Durchmesser aufgelöst. Dieser Tropfen kam in eine besondere kleine Porzellanschale. Zunächst wurde das Quecksilbersalz in der ursprünglichen Schale langsam verdampft und auf die Restsubstanzen (kleine Verunreinigungen usw.) die Cassiusprobe angewendet, die bei den Blindversuchen negativ ausfiel. Dann wurde der letzte Tropfen Quecksilber sehr langsam und vorsichtig in verdünnter Salpetersäure aufgelöst, und zwar durfte der Tropfen zuletzt nicht in der Schale herumspringen und ebenfalls keine Quecksilbersalzkristalle bilden, die eventuell Gold absorbieren könnten; die Salzlösung durfte also nie zur Sättigung kommen. War der letzte Tropfen auf diese Weise aufgelöst, so wurde das Quecksilbersalz langsam verdampft und die Reste ebenfalls mikroanalytisch untersucht.

Die Mikroanalyse wurde nach dem Verfahren von I. Donau[2]) durchgeführt, auf die mich Herr Prof. Böttger in dankenswerter Weise aufmerksam gemacht hat. Diese Analyse mußte aber erst den obigen Verhältnissen angepaßt werden. Man konnte nicht mit einer gewöhnlichen Boraxperle arbeiten, sondern nur mit mikroskopischen Boraxperlen. Das Goldkörnchen wurde mit einem winzigen Tröpfchen Königswasser benetzt, es löste sich dann das Gold ganz langsam auf. Nachdem die Goldchloridchlorwasserstofflösung ganz eingedampft war, wurde das Salz mit feinstem Boraxstaub bestreut und der Borax über der Bunsenflamme geschmolzen. Man konnte dann selbst bei Goldkörnchen, die unter dem Mikroskop kaum zu sehen waren, mit unbewaffnetem Auge die Purpurfärbung der mikroskopischen Boraxperlchen sehen. Es sei noch erwähnt, daß die Perlenreaktion von I. Donau noch Goldmengen von 0,025 Mikromilligramm nachzuweisen gestattet.

War durch diese Mikroanalyse beim Blindversuch kein Gold nachzuweisen, so wurde die andere Hälfte des Quecksilbers dem Lichtbogen ausgesetzt. Es wurde im ganzen mit drei verschiedenen Quecksilberproben gearbeitet, die ich der Reihe nach mit *Hg* Nr. I, II und III bezeichnen möchte.

Hg Nr. I wurde $2^3/_4$ Stunden einem Lichtbogen von 100 Amp. und 4 Volt bei einem Druck von 150 kg/cm² ausgesetzt; und zwar stand hierbei das U-Rohr unter Kohlensäuredruck. Das Auflösen dieses vom Lichtbogen beeindruckten *Hg* in Salpetersäure und mikroanalytische Behandlung der Restsubstanzen ergab nur schwache Spuren von Gold, die nicht mehr quantitativ erfaßbar waren.

Hg Nr. II wurde unter Wasser einem Druck von 625 kg/cm² ausgesetzt. Auf das Wasser wurde Öl geschichtet, um bessere Dichtung zu erzielen. Der Lichtbogen brannte also unter einem Wasserdruck von 625 kg/cm² $15^1/_2$ Stunden lang bei 135 Amp. und 2.84 Volt; also 2092 Ampèrestunden. Beim Auflösen des letzten *Hg*-Tropfens in Salpetersäure nach oben beschriebener Weise blieb ein nierenförmiges, zunächst nicht rein goldglänzendes Körnchen übrig. Nach vorsichtigem Verdampfen der letzten Spuren Salzes wurde das Körnchen hell goldglänzend und also schon unter dem Mikroskop als Gold erkennbar. Hierauf wurde der Kristall im Gebläse zu einer Kugel zusammengeschmolzen. Der Durchmesser der Kugel konnte im Okularmikrometer des Mikroskops gemessen, und die Menge Goldes zu 0,00081 mg bestimmt werden.

Hg Nr. III stand unter fünf verschiedenen Lichtbogen, die in folgender Tabelle zusammengestellt sind:

Zeit (Stunden)	Ampère	Volt	Druck (kg/cm²)	Ampère-Stunden
13	75	5	400	975
1	400	4,5	500	400
$^1/_2$	360	6	650	180
$^1/_4$	280	6,5	600	70
2	250	6,5	550	500

Die gesamte Lichtbogenbeeindruckung beläuft sich also auf 2125 Ampèrestunden. Das Resultat der Analyse ergab dieses Mal 0,0003 mg Gold.

Die Goldausbeute ist also in jedem Fall nur von der Größenordnung der Verunreinigungen und evt. auch als solche im Sinne von Duhme

1) Miethe u. Stammreich, Zeitschr. f. anorg. Chem. **150**, Nr. 4, 350—354, 1926.

2) I. Donau, Sitzungsber. d. Kais. Akad. d. Wissenschaften in Wien. Math.-naturw. Kl., Bd. CXIII, Abtl. IIb, Juni 1904.

und Lotz[1]) zu deuten. Eine Proportionalität zwischen Goldausbeute und der Ampèrestundenzahl konnte nicht gefunden werden.

Ich möchte auch an dieser Stelle dem inzwischen verstorbenen Herrn Geheimrat Des Coudres für die Überlassung der nötigen Mittel, sowie Herrn Prof. W. Böttger für wertvolle chemische Ratschläge meinen herzlichsten Dank aussprechen.

1) E. Duhme u. A. Lotz, Wissensch. Veröff. aus d. Siemenskonzern, V. Bd., 1. Heft 1926.

Leipzig, Theor.-phys. Institut, Oktober 1926.

(Eingegangen 8. Oktober 1926.)

Eine einfache Bestimmung des Verhältnisses $\mathfrak{H}/\mathfrak{M}$, Horizontalintensität des Erdmagnetismus zum magnetischen Moment eines Stabmagneten.

Von Carl Schmidt.

1. Ein Stabmagnet liege mit seiner Achse im magnetischen Meridian, Nordpol nach Norden. (Fig. 1.) N und S seien die beiden Punkte der Achse, an denen eine unmittelbar neben den Magneten gestellte kleine Bussole sich genau

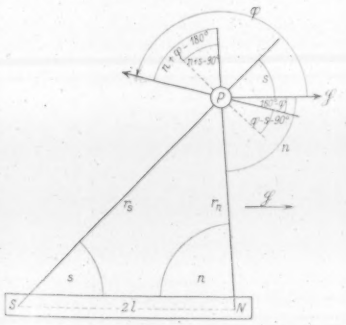


Fig. 1.

senkrecht zur Achse einstellt. Ich will sie, im folgenden kurz die Pole nennen. Ihr Abstand voneinander sei $2l$. Im Punkte P des Feldes, der soweit von N und S entfernt sein soll, daß die Richtungen von N nach den beiden Polen einer dort aufgestellten kleinen Zeichenbussole als gleich angesehen werden können, wird diese Bussole mit der Richtung $\mathfrak{H}$ des Erdfeldes einen Winkel φ bilden. Dieser bestimmt sich aus der Gleichgewichtsbedingung zwischen den drei nach dem Coulombschen Gesetz auf die Nadel der Bussole ausgeübten Drehmomenten: $\mathfrak{m}$ Polstärke des Magneten, μ der Nadel, 2λ ihr Polabstand, r_s und r_n die Längen PS und PN, n und s die in Fig. 1 gekennzeichneten Winkel:

$$O = 2\,\mathfrak{m}\,\mu \cdot \lambda \sin(\varphi - s)\left(\frac{r_s^2 + \lambda^2\cos^2(\varphi - s)}{(r_s^2 - \lambda^2\cos^2(\varphi - s))^2}\right) + 2\,\mathfrak{m}\,\mu\,\lambda \sin(n + \varphi)\left(\frac{r_n^2 + \lambda^2\cos^2(n + \varphi)}{(r_n^2 - \lambda^2\cos^2(n + \varphi))^2}\right) - 2\,\mathfrak{H}\,\mu\,\lambda \sin\varphi. \quad (1)$$

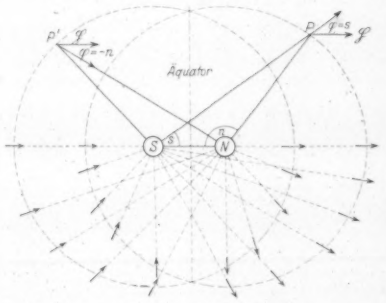


Fig. 2.

Sofern λ^2 neben r_s^2 und r_n^2 vernachlässigt werden kann, vereinfacht sich diese Bedingung nach Weglassung des Faktors $2\,\mu\,\lambda$ zu:

$$\frac{\mathfrak{m}}{r_s^2} \cdot \sin(\varphi - s) + \frac{\mathfrak{m}}{r_n^2} \sin(n + \varphi) - \mathfrak{H} \sin\varphi = 0. \quad (2)$$

Diese Gleichung wird besonders einfach, wenn entweder

$$\varphi - s = 0 \quad (3)$$

oder

$$n + \varphi = 0 \quad (3\,a)$$

ist. Man erhält dann (Fig. 2)

$$\frac{\mathfrak{H}}{\mathfrak{m}} = \frac{\sin(n + s)}{\sin s} \cdot \frac{1}{r_n^2} \quad (4)$$

bzw.

$$\frac{\mathfrak{H}}{\mathfrak{m}} = \frac{\sin(n + s)}{\sin s} \cdot \frac{1}{r_s^2} \quad (4\,a)$$

und unter Anwendung des Sinussatzes

$$\frac{\mathfrak{H}}{\mathfrak{m}} = \frac{2l}{r_n} \cdot \frac{1}{r_n^2} = \frac{2l}{r_n^3}, \quad (5)$$

d. h.

$$\frac{\mathfrak{H}}{\mathfrak{M}} = \frac{1}{r_n^3}.$$

Und entsprechend

$$\frac{\mathfrak{H}}{\mathfrak{M}} = \frac{1}{r_s^3}. \quad (5\,a)$$

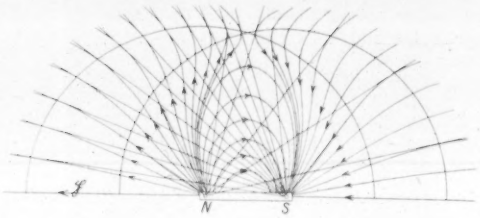


Fig. 3.

Das heißt: Es gibt einen Kreis um den Nordpol, auf dem die Richtung des Feldes (Erdfeld und Magnetfeld) immer mit der Richtung des Radius Vektor nach S übereinstimmt, und einen Kreis mit dem gleichen Radius um S, auf dem die Feldrichtung mit der Richtung nach N übereinstimmt: Die dritte Potenz des reziproken Wertes dieses Radius ist gleich $\mathfrak{H}/\mathfrak{M}$.

In der Figur sind zwei solche Kreise gezeichnet und die Feldrichtungen hineinkonstruiert.

Die Kreise schneiden sich in zwei Punkten des Äquators des Magneten. In diesem ist bekanntlich die Feldstärke des Magneten allein $\mathfrak{F} = \frac{\mathfrak{M}}{r^3}$. Das geht in die Formel (5) über, wenn $\mathfrak{F} = \mathfrak{H}$ ist. Die Schnittpunkte der beiden Kreise sind also die beiden Stellen, an denen $\mathfrak{F}$ gerade $\mathfrak{H}$ aufhebt.

2. Dieses theoretische Resultat läßt sich nun leicht nachprüfen: Man bewegt die kleine Zeichenbussole solange auf von N und S ausgehenden Strahlen entlang, bis die Richtung der Nadel genau mit derjenigen des Strahles übereinstimmt. Dadurch erhält man zahlreiche Punkte, deren Entfernung von den jeweiligen anderen Polen tatsächlich konstant ist. (Fig. 3.)

Ein von mir benutzter Stabmagnet $30 \times 2{,}5 \times 0{,}8$ cm lieferte für die entfernten Punkte der beiden Kreise den Radius $r_n = 55{,}2$ cm $= r_s$. Daraus folgt für $\mathfrak{H}/\mathfrak{M}$ der Wert $5{,}95 \cdot 10^{-6}$.

3. Als Kontrollmethode wurden die Gaußsche Ablenkungsmethode und die folgende Methode verwandt:

An einer den Anfangsbedingungen entsprechenden Stelle des Äquators wurde die Schwingungszeit der Bussole, sofern der Stab wieder im Meridian lag, festgestellt:

$$t_1 = 2\pi \sqrt{\frac{K}{(\mathfrak{F} - \mathfrak{H})\, 2\mu\lambda}}, \qquad (6)$$

K Trägheitsmoment der Nadel. Dann wurde der Magnet so umgelegt, daß sein Südpol auf N, sein Nordpol auf S zu liegen kam, und wieder die Schwingungszeit der Nadel bestimmt

$$t_2 = 2\pi \sqrt{\frac{K}{(\mathfrak{F} + \mathfrak{H})\, 2\mu\lambda}}, \qquad (7)$$

woraus nach Quadrieren und Dividieren folgt:

$$\frac{t_1^2 + t_2^2}{t_1^2 - t_2^2} = \frac{\mathfrak{F}}{\mathfrak{H}} = \frac{\mathfrak{M}}{r^3 \cdot \mathfrak{H}}. \qquad (8)$$

Also

$$\frac{\mathfrak{H}}{\mathfrak{M}} = \frac{1}{r^3} \cdot \frac{t_1^2 - t_2^2}{t_1^2 + t_2^2}. \qquad (9)$$

Zwei Messungen ergaben z. B.

$$r = 32{,}1 \text{ cm} \quad t_1 = 1{,}17 \text{ sec} \quad t_2 = 0{,}96 \text{ sec}.$$
$$\mathfrak{H}/\mathfrak{M} = 5{,}90 \cdot 10^{-6}.$$
$$r = 48{,}7 \text{ cm} \quad t_2 = 1{,}52 \quad t_1 = 3{,}52.$$
$$\mathfrak{H}/\mathfrak{M} = 5{,}92 \cdot 10^{-6},$$

was mit dem unter (2) ermittelten Wert hinreichend übereinstimmt.

Hamburg, 8. Oktober 1926.

(Eingegangen 11. Oktober 1926.)

Die neueren Vokaltheorien[1]).

Von Heinrich Jung.

§ 1. Die Theorie von Helmholtz-Stumpf.

Nach H. v. Helmholtz und C. Stumpf sind die Vokale Klänge. Sie bestehen aus einem Grundton (der zugleich den Stimmton darstellt) mit einer größeren Anzahl harmonischer Ober-

1) Während der Fertigstellung dieser Arbeit kam mir das neu erschienene Buch von C. Stumpf, „Die Sprachlaute". Springer, Berlin 1926, in die Hand. Stumpf kommt darin in seiner Besprechung der Theorie von Jaensch zu demselben Ergebnis wie ich. Der vorliegende Aufsatz kann also als Bestätigung und in gewissem Sinn genauere Begründung der Stumpfschen Ausführungen gelten. Von der von L. Hermann aufgestellten „Anblasetheorie" sehe ich im folgenden ab, da sie wohl als widerlegt gelten kann.

töne. Die Vokalkurven sind also streng periodisch. In gewissen, für den betreffenden Vokal charakteristischen Tonbereichen — den sogenannten Formanten —, deren absolute Höhe unabhängig vom Stimmton ist und nur vom Vokal abhängt, sind die Teiltöne verstärkt gegenüber denen, die in der Umgebung des Formanten liegen. Meist fallen mehrere Oberschwingungen in ein Formantgebiet hinein, da der Formant sehr breit ist (oft umfaßt er eine Oktave und mehr). Das Zentrum des Formanten hat aber bei einem bestimmten Vokal stets dieselbe Tonhöhe. Liegt der Stimmton zu hoch, so daß der Formant nicht im Klang enthalten sein kann, so bildet sich der Vokal nur unvollkommen aus. — Der Vokal U bildet nach den Ergebnissen der Versuche von C. Stumpf in gewissem Sinn eine Ausnahme. Da jeder tiefere Ton U-ähnlich klingt, besitzt dieser Vokal keinen festen Formanten. Bei ihm ist meist der Grundton am stärksten (mitunter auch der 2. Teilton). U hat also einen mit dem Grundton beweglichen Formanten, der sich von g^1 an abwärts verschiebt. Das gleiche gilt für die Unterformanten von I und U.

A, O und U besitzen nur einen wesentlichen Formanten, die anderen Vokale (E, I, $Ä$, $Ö$, $Ü$) je zwei, von denen der höhere der stärkste ist. Jedoch können noch schwächere Formanten auftreten, die der Stimme die individuelle Färbung geben. Insbesondere findet sich bei helleren Stimmen im Vokal A ein Nebenformant in der Gegend von 2000—3000 Schwingungen ($c^4 - g^4$). Bei O findet er sich unter Umständen auch, nur schwächer als bei A, ebenso bei U, nur noch unbedeutender.

Für die Zentren der Formanten und Unterformanten erhält man folgende Lagen (der Unterformant steht an erster Stelle):

Vokal:	U	O	A
Formantzentrum:	variabel ($\leq g^1$)	g^1	g^2
Schwingungszahl:	< 388	388	775

E		I		$Ä$		$Ö$		$Ü$	
g^1	d'^4	var. ($\leq g^1$)	b^4	d'^2	$f\#^3$	g^1	g^3	var. ($\leq g^1$)	b^3
388	2323	≤ 388	3086	580	1843	388	1550	≤ 388	1843.

Trägt man dies in ein Koordinatensystem ein (wobei man annimmt, daß für U, O, A beide Formanten in einen zusammenfallen), so ergibt sich, wenn man für die variablen Formanten ein mittleres Gebiet einzeichnet (etwa c^1), diese Figur:

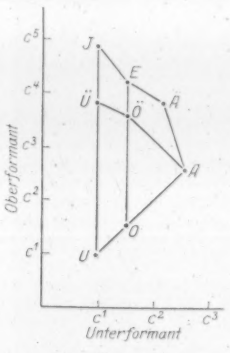


Fig. 1.

Sieht man von kleinen Verzerrungen ab, so stimmt diese Darstellung vollkommen überein mit dem Vokaldreieck. —

Wenn es auch in der Hauptsache auf die Lage der Formanten ankommt, so hat doch C. Stumpf festgestellt, daß für das Zustandekommen eines guten Vokals auch die Gestalt des Formanten nicht ganz ohne Einfluß ist. Soll der Vokal rein sein, so müssen die Stärken der einzelnen Teiltöne der Formanten ungefähr in dem Verhältnis zueinander stehen, wie es Stumpf gefunden hat.

Durch Beimengung unharmonischer Komponenten wird nach C. Stumpf der Vokalklang gestört. Also gehören unharmonische Töne nicht zum Vokal. In der Höhe sind die Schädigungen weniger stark, da dort die harmonischen Teiltöne so dicht liegen, daß ein unharmonischer Beiton keine wesentliche Verstimmung des Klangphänomens bedingt.

Geflüsterte Vokale sind nach C. Stumpf Geräusche. Sie besitzen ein kontinuierliches Tonspektrum, in dem sich dieselben Formanten wie bei gesungenen Vokalen als Maxima finden.

Eine Bestätigung der Theorie von Helmholtz-Stumpf liefern die objektiven Vokalkurvenaufzeichnungen von F. Trendelenburg mittels des Kondensatormikrophons. Die Kurven sind streng periodisch. Nur wenn „mit wilder Luft" gesungen wird, d. h. so, daß möglichst wenig Luft zur Stimmbildung im Kehlkopf verbraucht wird, zeigen sich unharmonische Komponenten (vermutlich durch ein pfeifenartiges Anblasen der Mundhöhle). Auch die Formanten befinden sich in der von C. Stumpf gefundenen Höhenlage.

Eine zweite Arbeit von Trendelenburg befaßt sich mit der Aufzeichnung der stimmhaften Konsonanten *L*, *M*, *N*, *R*. Hier zeigen sich auch, wie bei den Vokalen, charakteristische Formanten. Der wesentliche Unterschied ist aber der, daß die Konsonanten auch unharmonische Komponenten enthalten.

§ 2. Die Theorie von E. R. Jaensch.

Zeichnet man Vokalkurven, die man auf Grund der Helmholtzschen Vokalsynthese erhält, so findet man, daß die Schnittpunkte dieser Kurven mit der Abszissenachse verschiedene Abstände haben, die aber einem Mittelwert verhältnismäßig nahe bleiben. Dieses Merkmal hält Jaensch für das Wesentliche. Dadurch angeregt, konstruierte er den ersten Typus seiner Vokalkurven, die Kurven mit „Wellenlängenvariation". Sie bestehen aus aneinandergereihten einfachen Sinuswellen mit gleicher Amplitude und variabler Wellenlänge. Jedoch bleiben die Wellenlängen einem Mittelwert nahe. Die diesem Mittelwert entsprechende Schwingungszahl bezeichnet Jaensch als „Frequenz". Sie ist charakteristisch für die Vokalqualität. In späteren Arbeiten werden auch andere Typen von Vokalkurven hergestellt (mit Amplitudenvariation oder Phasenverschiebung). Auf diese Versuche stützt sich die Theorie von E. R. Jaensch. Sie sagt folgendes aus:

Eine Vokalkurve entsteht, wenn eine Sinuskurve durch irgendwelche Störungsfaktoren[1]) variiert wird. Je nach der Stärke der Störung erhält man, vom reinen Ton ausgehend, einen vokalartigen Ton, einen Vokal, einen Vokal mit Geräuschbeimischung und schließlich ein Geräusch. Charakteristisch für die Vokalqualität ist die Schwingungszahl der Sinuskurve, aus der die Vokalkurve entstanden zu denken ist. Jaensch nennt sie „Frequenz". Je nach der Höhe des Frequenztones erhält man einen bestimmten Vokal der Reihe *U*—*O*—*A*—*E*—*I*.

Die Schwingungszahlen des Frequenztons sind:

ca. 225 für *U*,
„ 450 „ *O*,
„ 1000 „ *A*,
„ 2000 „ *E*.

(Die Hauptvokale stehen also im Abstand von je einer Oktave. Für *I* gibt Jaensch nichts an. Bei etwa 2200 Schwingungen erhält er einen Vokal zwischen *E* und *I*.)

Von *Ö* und *Ü* ist nicht die Rede (*Ä* liegt zwischen *A* und *E*), die Theorie von Jaensch liefert diese Vokale nicht. Dies ist ganz plausibel, da Jaensch nur die Höhe des Frequenztons als einzigen Parameter für die Vokalqualität besitzt, während Stumpf in den beiden Formanten 2 Parameter zur Verfügung hat.

Die Störungsfaktoren können verschiedene sein. Einmal kann man in einer reinen Sinuskurve die Wellenlängen variieren, d. h. in der neuen Kurve folgen einzelne Wellen mit ein wenig verschiedener Wellenlänge aufeinander. Die mittlere Wellenlänge liefert dann die Frequenz. Die Größe der Störung ist maßgebend dafür, ob das resultierende Schallphänomen dem reinen Ton oder dem Geräusch nähersteht. In welcher Anordnung die einzelnen Wellen aufeinander folgen, ist vollkommen gleichgültig, da diese ja auf die mittlere Wellenlänge und auf die Stärke der Störung keinen Einfluß hat. Ferner kann man die Amplituden der einzelnen Wellen variieren. Schließlich kann man einen Teil der Wellen durch ein schwingungsfreies Stück ersetzen und die übrigbleibenden Kurvenstücke gegenseitig in ihrer Phase verschieben. Selbstverständlich können auch mehrere Störungsfaktoren gleichzeitig eingeführt werden.

Nach der Theorie von Jaensch ist es keineswegs erforderlich, daß die Kurven irgendeine Periodizität aufweisen. Nun bedingt es aber die Apparatur, mit der Jaensch arbeitete, daß alle seine Vokalkurven doch streng periodisch waren (sie bildeten den Rand einer rotierenden Scheibe). Obwohl Jaensch diese Periodizität ausdrücklich als unwichtig erklärt, legen die Ergebnisse der Versuche von Helmholtz und Stumpf den Gedanken nahe, daß sie doch wesentlich sein könnte und dadurch überhaupt erst den Erfolg der Jaenschschen Versuche herbeiführt. — Jaensch versuchte zu beweisen, daß die Periodizität unwesentlich ist, indem er bei der Selensirene, mit der er arbeitete, das zur Hervorbringung des Phänomens nötige Licht durch einen photographischen Momentverschluß nur so kurze Zeit wirken ließ, daß etwa $^3/_4$ Perioden in Tätigkeit traten. Man erhielt auch so einen deutlichen Vokal. Schließlich wird erwähnt, daß Garten und Kleinknecht in Vokalklängen auch unharmonische Komponenten gefunden haben. Beide Argumente kann ich nicht als beweisend ansehen. Im ersten Falle könnte es sich um einen Flüstervokal[1]) handeln. Die Zerlegung einer unperiodischen Kurve durch ein Fouriersches Integral liefert ja ein kontinuierliches Spektrum. Dem Augenschein nach würden sich sicher auch die nötigen Formanten richtig ergeben. Im zweiten Fall könnte der Vokal möglicherweise durch wilde Luft hervor-

1) Worin diese Störungsfaktoren bestehen, wird weiter unten näher erläutert.

1) Jaensch gab allerdings in einer mündlichen Diskussion an, daß es sich um ein „gesprochenes *A*" handelte.

gebracht sein und so die unharmonische Komponente erhalten haben[1]).

Der Stimmton wurde bei den Versuchen von Jaensch im allgemeinen durch den „Periodenton" geliefert, d. h. den Ton, der eine ganze Periode als Wellenlänge hat. Lag dieser unterhalb der Hörgrenze, so trug der Frequenzton den stimmhaften Vokal. Weiter ergaben sich gesungene Vokale durch Superposition gewöhnlicher Sinuskurven, die den Stimmton lieferten, mit Vokalkurven der oben beschriebenen Art. —

Im folgenden soll der günstigste Fall für die Theorie von Jaensch angenommen werden, nämlich daß die Selensirene, mit der Jaensch arbeitete, die Vokalkurven unverzerrt wiedergegeben hat[2]).

Da die Jaenschschen Kurven alle periodisch sind, kann man sie nach Fourier zerlegen. Man erhält so eine Reihe harmonischer Schwingungen, also einen Klang, d. h. genau dasselbe, was auch Helmholtz und Stumpf gefunden hatten. Nun ist die Frage, ob die Fourierzerlegung der Jaenschschen Kurven auch die von Helmholtz bzw. Stumpf gefundenen Formanten liefert.

Ist dies der Fall, so liefern die Versuche von Jaensch eher eine vollkommene Bestätigung der Theorie von Helmholtz-Stumpf, als daß sie sich als Stütze für eine neue Theorie, die sich gegen die Helmholtzsche richtet, verwenden lasssen.

§ 3. Ergebnis der Fourierzerlegung der Jaenschschen Kurven.

Auf Veranlassung von Herrn Prof. Dr. Cl. Schaefer und Herrn Prof. Dr. F. A. Schulze, Marburg, habe ich bei einer größeren Zahl von diesen Kurven die Fourieranalyse durchgeführt. Dabei ging ich, um unnötige, langwierige Rechnungen zu vermeiden, folgendermaßen vor: Um vor der Berechnung der Teiltonenergien einen orientierenden Überblick zu erhalten, zerlegte ich die Kurven graphisch in den geraden und ungeraden Anteil. In diesen neuen Kurven war die Phasenverschiebung der sin- und cos-Glieder beseitigt, daher gestatteten sie nach dem Augenschein Schlüsse auf die Struktur des Tonspektrums, die man an der ursprünglichen Kurve nicht ziehen konnte. Vor allen Dingen konnte man durch Auszählen der Zacken die Lage der Formantzentren bestimmen, außerdem durch nähere Betrachtung der Schwebungen die voraussichtlich stärksten Teiltöne ablesen. Nachdem so die Formanten festgestellt waren — bei jeder Kurve ergab sich stets nur ein Formant —, ging ich an die Berechnung der Teiltonenergien. Ich hörte auf, wenn die Grenzen des Formantgebietes erreicht waren.

Die Teiltonenergien sind berechnet mit Hilfe der Formel $E_\nu = \dot{p} \cdot \nu^2 \cdot (a_\nu^2 + b_\nu^2)$, wobei $\dot{p}$ ein hier unwesentlicher Proportionalitätsfaktor ist und ν die Ordnung des Obertons, während a_ν und b_ν die Fourierkoeffizienten der cos- und sin-Glieder darstellen. In den unten folgenden Tabellen sind die Energien in Prozenten des jeweils stärksten Teiltons der betreffenden Kurve eingetragen. Sämtliche Integrale sind analytisch berechnet, die oben angegebene graphische Methode diente nur zur ersten Orientierung zwecks Feststellung der Formanten.

In der folgenden Zusammenstellung der Zerlegungsergebnisse sind die Wellenlängen der einzelnen Sinuswellen, da sie in der Apparatur von Jaensch den Rand einer Kreisscheibe bilden, in Bogengraden angegeben. Ferner sind alle Angaben bei den Teiltonenergien auf ganze Prozente abgerundet. Striche bedeuten nicht berechnete Teiltöne.

A. Kurven aus: E. R. Jaensch, Die Natur der menschlichen Sprachlaute.

α) Vokalkurven mit Wellenlängenvariation.

Die folgenden Kurven bestehen aus Sinuswellen, deren Wellenlänge ein wenig variiert. Die Amplituden sind unter sich gleich.

Kurve I:

Reine Sinuskurve.

Kurve II (= XXVII):

Die Periode besteht aus aneinandergereihten Sinuswellen mit folgenden Wellenlängen:

22°, 24°, 23°, 26°, 25°,
24°, 25°, 26°, 23°, 22°,
23°, 22°, 25°, 24°, 26°,

(mittlere Wellenlänge 24°).

Kurve III (= XXVIII):

Periode: 20°, 24°, 22°, 28°, 26°,
24°, 26°, 28°, 22°, 20°,
22°, 20°, 26°, 24°, 28°,

(Mittel 24°).

Kurve IV:

Periode: 18°, 24°, 21°, 30°, 27°,
24°, 27°, 30°, 21°, 18°,
21°, 18°, 27°, 24°, 30°,

(Mittel 24°).

Kurve XXI:

Periode: 6 mal 24°, 22°,
7 mal 24°, 26°,

Kurve XXII:

Periode: 6 mal 24°, 20°,
7 mal 24°, 28°.

1) Vgl. Stumpf, Die Sprachlaute, S. 212. Hiernach ist es noch nicht einmal sicher, ob sich in den Vokalklängen wirklich unharmonische Komponenten gefunden haben.

2) Vgl. Stumpf, Die Sprachlaute, S. 222f. Hier behandelt Stumpf die Veränderungen, die das einer Kurve entsprechende Schallphänomen aus mehrfachen Ursachen zweifellos erleidet.

Kurve XXIII:
Periode: 3 mal 24°, 22°,
2 mal 24°, 23°,
3 mal 24°, 25°,
3 mal 24°, 26°.

Kurve XXIV:
Periode: 3 mal 24°, 22°,
2 mal 24°, 25°,
3 mal 24°, 23°,
3 mal 24°, 26°.

Kurve XXV:
Periode: 3 mal 24°, 20°,
2 mal 24°, 22°,
3 mal 24°, 26°,
3 mal 24°, 28°.

Kurve XXVI:
Periode: 3 mal 24°, 20°,
2 mal 24°, 26°,
3 mal 24°, 22°,
3 mal 24°, 28°.

Kurven:	Ordnung der Teiltöne: 11.	12.	13.	14.	15.	16.	17.	18.	19.	20
II.—XXVII.	1	4	2	6	100	15	2	17	—	—
III.—XXVIII.	—	1	2	46	100	30	11	16	—	—
IV.	—	72	—	—	56	—	—	—	—	100
XXI.	—	—	1	2	100	4	1	—	—	—
XXII.	—	1	0	10	100	17	0	2	2	—
XXIII.	—	—	—	1	100	1	3		—	—
XXIV.	—	—	4	1	100	1	1	—	—	—
XXV.	—	—	32	10	100	32	22	4	—	—
XXVI.	—	—	7	1	100	10	10	2	3	—

Kurve II stellt nach E. R. Jaensch einen Ton mit Vokaleinschlag dar, Kurve III einen guten Vokal, Kurve IV ein Geräusch. Diese sukzessive Entfernung vom reinen Ton ist auch in der Zerlegung zu erkennen in der Abnahme der relativen Stärke des Formantzentrums (bei Kurve IV ist der Formant sogar vollkommen unkenntlich). Die anderen Kurven geben mehr oder weniger reine Vokale.

β) Vokalkurven mit Phasenverschiebung.

Bei den folgenden Kurven ist ein Teil der (unter sich gleichen) Sinuswellen durch ein schwingungsfreies Stück ersetzt, und die übrigbleibenden Kurvenstücke sind in ihrer Phase gegenseitig verschoben.

Kurve XXXIII:
Periode: 4 mal 24°, 72° frei,
4 mal 24°, 96° frei.
(Phasenverschiebung 0°).

Kurve XXXIV:
Periode: 4 mal 24°, 84° frei.
(Phasenverschiebung 12°, d. h. $\frac{1}{2} \cdot 24°$).

Die Periode umfaßt 180°, es sind also 2 Perioden auf der Scheibe. Dadurch ändert sich auch in der folgenden Tabelle die Ordnung jedes Obertons, da die Tabelle so angelegt ist, daß Töne, die bei gleicher Rotationsgeschwindigkeit der Scheibe gleiche absolute Höhe haben, untereinander stehen.

Kurve XXXV:
Periode: 4 mal 24°, 78° frei,
4 mal 24°, 90° frei.
(Phasenverschiebung 6°, d. h. $\frac{1}{4} \cdot 24°$).

Kurve XXXVI:
Wie Kurve XXXV, nur von hinten nach vorn.

Kurven:	Ordnung der Teiltöne: 9.	10.	11.	12.	13.	14.	15.	16.	17.	18.	19.	20.	21.
(für Kurve XXXIV.)		5.		6.		7.		8.		9.		10.	
XXXIII.	1	1	0	0	30	0	100	0	33	0	0	0	4
XXXIV.		—		6		88		100		7		—	
XXXV, XXXVI	—	—	—	7	25	81	100	71	48	5	—	—	—

Kurve XXXIV liefert einen Vokal, XXXV u. XXXVI einen tonartigen Vokal, XXXIII einen fast reinen Ton.

B. Kurven aus: H. Lachmund, Vokal und Ton.

α) Vokalkurven mit Amplitudenvariation und Wellenlängenvariation, teilweise auch mit beiden.

In der Darstellung des Herrn Lachmund war die Art der Amplitudenvariation nicht so genau angegeben, wie es zu einer analytischen Fourierzerlegung notwendig ist. Ich benutzte daher Kurven, die zu dem dort beschriebenen Typus gehören, also zur Beurteilung der Theorie ebenso brauchbar sind wie die von Lachmund benutzten, wenn sie auch vielleicht sich nicht ganz mit jenen decken.

Kurve A:
Periode: λ: 20°, 24°, 22°, 28°, 26°.
Amplituden alle 1 cm.
(3 Perioden auf der Scheibe.)

Kurve B:
Periode: λ: 20° 24° 22° 28° 26°
Ampl.: 0,4 0,7 1,0 0,7 0,4 cm.
(3 Perioden auf der Scheibe.)

Kurve C:
Periode: λ = 24°
Ampl.: 0,6 1,0 0,9 0,8 0,7 cm.
(3 Perioden auf der Scheibe).

Kurve D:
Periode: λ = 24°
Ampl.: 0,2 1,0 0,8 0,6 0,4 cm
(3 Perioden auf der Scheibe).

Kurve E:
Periode: λ = 24°
Ampl.: 0,2 1,0 0,6 cm.
(3 Perioden auf der Scheibe.)

	1.	2.	3	4.	5.	6.	7.
A.	—	—	1	13	100	25	—
B.	1	0	13	21	100	72	—
C.	—	—	—	1	100	1	—
D.	0	0	1	5	100	9	2

	1.	2.	3.	4	5.
E.	1	6	100	14	4

(Kurve E paßt wegen der absoluten Höhe der Teiltöne nicht in die vorige Tabelle, daher steht sie für sich.)

Nach E. R. Jaensch ist B. eine Geräuschkurve. Der Formant ist hier zwar ausgeprägt, aber bei der Berechnung der Teiltonenergien zeigt sich (durch Untersuchung der Summe der Amplitudenquadrate), daß der Formant nur einen geringen Teil der Energie des Klanges verbraucht, so daß sich die überschüssige Energie nahezu gleichmäßig über weite Strecken des Tonspektrums verteilt und dadurch das Geräusch verursacht. C. stellt einen fast reinen Ton dar, daher auch das scharfe Formantzentrum. Die anderen Kurven liefern mehr oder weniger gute Vokale.

β) Vokalkurven mit schwingungsfreien Stücken und Phasenverschiebung.

Kurve F:

Periode: 5 mal 24°, 60° frei.
(Phasenverschiebung 12°, d. h. $^1/_2 \cdot 24°$).
(2 Perioden auf der Scheibe).

Kurve G:

Periode: 3 mal 24°, 18° frei.
(Phasenverschiebung 6°, d. h. $^1/_4 \cdot 24°$).
(4 Perioden auf der Scheibe).

	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.
F.	0	0	0	1	3	0	87	100	0	4	5

	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.
G.	1	2	11	100	0	3	5

F. und G. stellen Vokale dar, wobei G. dem Ton näher steht als F.

C. Kurven aus: E. R. Jaensch und G. Rothe, Die psychologische Akustik der Sprachlaute.

Die hier folgenden Kurven entstehen durch Variation von Kurven, die aus mehreren Sinusschwingungen durch Superposition hervorgegangen sind.

Kurve I:

Superposition zweier Sinuskurven mit dem Wellenlängenverhältnis 4 : 5 und den Amplituden 0,8 cm bzw. 0,2 cm.

Kurve III:

Entstanden aus I. durch Verkleinerung der dritten Schwingung (d. h. des Stückes zwischen dem 4. und 6. Durchgang durch die Ruhelage) im Verhältnis 2 : 3.

Kurve IV:

Ebenso entstanden, nur Verkleinerung 1 : 3.

Kurve V:

Superposition dreier Sinuskurven mit dem Wellenlängenverhältnis 2 : 4 : 5 und den Amplituden 0,2 cm, 0,8 cm und 0,2 cm.

Kurve VI:

Entstanden aus V. durch Verkleinerung der dritten Schwingung im Verhältnis 2 : 3.

	1.	2.	3	4.	5.	6.
I.	—	—	—	100	10	—
III.	—	—	—	100	10	—
IV.	0	1	3	100	13	3
V.	—	2	0	100	9	—
VI.	0	2	2	100	13	3

Die Superpositionskurven I und V liefern nach E. R. Jaensch nur bei „synthetisch auffassenden" Hörern Vokale. Ich habe ihre Analyse hier wiedergegeben zum Vergleich mit den variierten Kurven. Bei III ist auch nach Jaensch die Variation zu schwach, um das Phänomen wesentlich zu ändern, erst bei IV wird der Vokal deutlich. Die Analyse spiegelt diese Verhältnisse gut wider. Die Kurve VI gibt auch einen Vokal. —

In sämtlichen Analysen zeigt sich deutlich der erwartete Formant. Was die Lage seines Zentrums anbetrifft, so ergibt eine einfache Betrachtung, daß sie zusammenfällt mit dem Frequenzton der analysierten Kurve. Vergleicht man dessen Schwingungszahl für die verschiedenen Hauptvokale (nach Jaensch) mit der Schwingungszahl des Oberformanten nach Stumpf:

	U	*O*	*A*	*E*	*I*
Jaensch:	ca. 225	450	1000	2000	—
Stumpf:	$\leq$ 380	388	775	2323	3686

so sieht man, daß diese Übereinstimmung im großen und ganzen ausreichend ist. Diejenigen Kurven, die nach Jaensch einen guten Vokal liefern, haben auch ungefähr das Intensitätsverhältnis der Teiltöne, wie es Stumpf verlangt, wenn ein reiner Vokal zustande kommen soll.

In den Einzelheiten finden sich allerdings kleinere Abweichungen. So ist z. B. häufig bei Kurven, die nach Jaensch genau das gleiche Schallphänomen liefern sollen, die Struktur des Formanten grundverschieden; vielfach wird z. B. die Analyse einen tonartigen Vokal erwarten lassen, während in den Veröffentlichungen von Jaensch ein guter Vokal angegeben ist usw. Dies kann daran liegen, daß die Selensirene von Jaensch die Einzelheiten der Kurven nicht mit der erforderlichen Genauigkeit wiedergibt.

Für die Vokale *A* und *O* ist hiermit die Übereinstimmung der experimentellen Ergebnisse

von C. Stumpf und E. R. Jaensch nachgewiesen. Auch auf den Vokal *U* läßt sich dieses Ergebnis ausdehnen, da bei langsamer Rotation der Scheibe das Formantzentrum der Kurve von Jaensch in das Gebiet fällt, in dem sich der Stumpfsche *U*-Formant bewegt. Allerdings begleitet der Formant nicht mehr den Grundton des Klanges (das Zentrum stellt meistens den 15. Teilton dar), wie man es bei den Stumpfschen *U*-Analysen und -Synthesen findet. Doch kann es gut so sein, daß dies unwesentlich ist. Nach Stumpf kommt das *U* am besten heraus, wenn der stärkste Teilton in die Gegend von $c - c^1$ fällt. Nach den Angaben von Jaensch liegt das Formantzentrum für *U* (ca. 225 Schwingungen) ungefähr in diesem Bereich (ca. $c^1 - d^1$).

Etwas anderes ist es bei den Vokalen, die zwei Formanten haben müssen. In der Fourieranalyse der Jaenschschen Kurven tritt der Unterformant nicht auf. Nun erleiden allerdings die Kurven auf dem Weg von der rotierenden Scheibe bis zum Aufnahmeapparat im Ohr allerlei Veränderungen, und es ist von vornherein nicht ausgeschlossen, daß hierdurch ein Unterformant zustandekommt. Vor allen Dingen kommen die Differenztöne in Frage, die erzeugt werden durch die im Formant enthaltenen Teiltöne. Hier zeigt schon ein roher Überblick, daß nur der Grundton des Klanges, höchstens noch der 2. Teilton, wesentlich verstärkt werden[1]). Dies könnte einen Unterformanten liefern, aber dieser hat nur in den seltensten Fällen die richtige Lage, die für *E* und *I* nötig ist. Meist dienen diese Differenztöne nur dazu, den Grundton so zu verstärken, daß er zum Träger der Stimme wird. Auf die Vokalqualität sind sie ohne wesentlichen Einfluß. — Es bleibt also vorläufig nichts anderes übrig, als für das Gelingen der Versuche bei *E* (bei *I* scheinen sie nicht recht gelungen zu sein, da Jaensch nichts darüber aussagt) Ungenauigkeiten bei der Wiedergabe durch die Selensirene verantwortlich zu machen.

Daß die Theorie von Jaensch überhaupt nur die Hauptvokale liefert, wurde oben schon erwähnt. Wahrscheinlich könnte man durch Variation geeigneter Superpositionskurven (die von G. Rothe verwendeten eignen sich nicht, da sie aus leicht ersichtlichen Gründen nur einen Formanten liefern) oder durch Superposition geeigneter variierter Kurven auch die übrigen Vokale des Vokaldreiecks erhalten. Allerdings reicht dann der Frequenzton als Charakteristikum für die Vokalqualität nicht aus, da noch ein zweiter Parameter nötig ist. Dadurch verliert die Theorie an Einfachheit, praktisch wird sie mit den Ergebnissen von C. Stumpf identisch.

Vollkommen vergleichbar werden die Fourieranalysen der Jaenschschen Kurven mit den Vokalanalysen von C. Stumpf erst, wenn man die Empfindlichkeit des Ohres in den verschiedenen Tonhöhen berücksichtigt. Denn Stumpf hat die Stärke der Teiltöne mit dem Ohr geschätzt, während die Fourieranalyse der Kurven die objektiven Energien liefert. Letztere sind noch mit der Empfindlichkeit des Ohres zu multiplizieren, damit sie mit den Stumpfschen Teiltonstärken vergleichbar werden. Nach Messungen von F. W. Kranz[1]) ergibt sich hierfür folgende Figur:

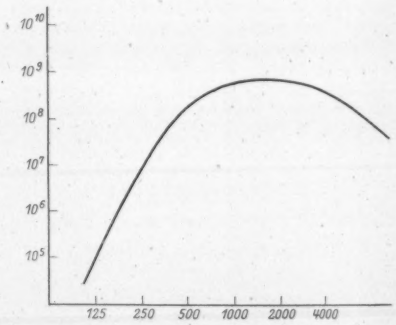


Fig. 2.

(Die Abszisse zeigt, in logarithmischem Maßstab, die Schwingungszahlen, die Ordinate die Empfindlichkeit, d. h. den reziproken Wert der Reizschwellenenergie, ebenfalls in logarithmischem Maß.)

Durch die Empfindlichkeit des Ohres ändert sich die Struktur der Formanten, da bei *U*, *O*, *A*, *E* die höheren Teiltöne im Vergleich zu den tieferen verstärkt werden, bei *I* umgekehrt. Unkenntlich kann ein Formant nicht werden, wie ein Blick auf die Figur zeigt, da der Formant mit seiner nächsten Umgebung etwa eine Oktave umfaßt und in einem solchen Bereich die Empfindlichkeitsunterschiede nicht so groß sind, daß ein scharfes Maximum vernichtet werden kann. Höchstens verschiebt sich das Zentrum ein wenig. Die früheren Ergebnisse bleiben also gültig. — Dagegen kann durch das hohe Maximum der Empfindlichkeitskurve in der Gegend von 2000—3000 Schwingungen

1) Stumpf erwähnt dies schon an mehreren Stellen.

1) F. W. Kranz, Minimum Intensity of Audition, Physical Review **21**, 1923, S. 577.

ein Nebenformant entstehen, der in der objektiven Vokalkurve nicht enthalten ist. Dies ist aber gerade der schwache Formant, der bei *A*, *O* und *U* von Stumpf in hellen Stimmen gefunden, aber auch von F. Trendelenburg (anscheinend bei besonders hellen Stimmen) objektiv nachgewiesen wurde. Daß er bei *O* und *U* wesentlich schwächer und seltener ist als bei *A*, erklärt sich dadurch, daß die Ordnung der Teiltöne, die bei *O* in diesen Schwingungszahlenbereich fallen, etwa die doppelte ist als bei *A*, bei *U* sogar die 4-fache, und daß bei hohen Ordnungen die Energie der Teiltöne wegen der Konvergenz der Fourierreihe rasch abnehmen muß. —

Der Unterformant des *E* kann durch die Empfindlichkeitskurve des Ohres nicht hervorgebracht werden, da diese in der fraglichen Gegend (bei ca. 400 Schwingungen) kein Maximum hat. Man bleibt also auf die oben gegebene Erklärung beschränkt.

Fällt der Formant in die Gegend von 2000—3000 Schwingungen, so wird er wegen des Maximums der Empfindlichkeitskurve, das an derselben Stelle liegt, bedeutend schärfer, als wenn er sich an einer tieferen Stelle befindet. Das Schallphänomen muß sich in diesem Fall also dem Ton näher befinden als sonst. Dies ist in der Tat von Jaensch beobachtet worden. Bei Versuchen mit *U*, *O* und *A* stellte sich heraus, daß Störungsfaktoren bei tiefer Lage stärker wirken als bei hoher, d. h., daß bei ein und derselben Kurve, wenn man sie mit verschiedener Geschwindigkeit rotieren läßt, der Vokal *A* dem Ton näher steht als *O* oder gar *U* (ganz abgesehen davon, daß schon ein reiner Ton in der Tiefe *U*-ähnlich klingt). Dies ist aber gerade das, was aus der Empfindlichkeit des Ohres bei verschiedenen Tonhöhen gefolgert werden kann.

§ 4. Zusammenfassung.

Aus den vorangegangenen Untersuchungen ergibt sich, daß die Versuche, die Jaensch zur Begründung seiner Vokaltheorie angestellt hat, die Theorie von H. v. Helmholtz und C. Stumpf (gegen die sich die Jaenschsche Theorie wendet) in vollem Umfang bestätigen. Für *A*, *O* und *U* ist die Übereinstimmung der Versuchsergebnisse beider Theorien auffallend, während bei *E* für das Gelingen der Jaenschschen Experimente wahrscheinlich Ungenauigkeiten in der Wiedergabe der Kurven durch die Apparatur verantwortlich zu machen sind (wegen des in den Kurven objektiv nicht vorhandenen Unterformanten); die Versuche bei I scheinen auch nicht ganz gelungen zu sein. Wie Jaensch einmal sagt[1]), daß den Teiltönen, die außer dem Frequenzton selbst im Formant enthalten sind, keine andere Bedeutung zukommt als die, die zum Frequenzton gehörige reine Sinuskurve so zu variieren, daß eine Vokalkurve entsteht, so kann man — vielleicht besser — umgekehrt sagen, daß die Störungsfaktoren in den Jaenschschen Kurven weiter keine Aufgabe haben, als einen einzelnen Ton (nämlich den zur unvariierten Kurve gehörigen) in ein Formantgebiet, wie es die Fourieranalyse liefert, zu verwandeln. — Die Theorie von Jaensch versagt vollständig bei allen Vokalen, die 2 Formanten haben. Die Experimente können, wie oben angedeutet, verhältnismäßig leicht so ausgedehnt werden, daß sie voraussichtlich auch diese Vokale liefern. Ob sie aber dann noch erlauben, eine einigermaßen einfache und einleuchtende Theorie auf sie zu gründen, ist mehr wie fraglich, mindestens sehr unwahrscheinlich. Ehe die Theorie den Anspruch erheben darf, das Wesen der Vokale erfaßt zu haben, muß sie vollständig sein, d. h. wirklich alle Vokale umfassen. Und ob sie dann nicht im wesentlichen nur auf eine andere Darstellung — und wahrscheinlich eine viel kompliziertere und undurchsichtigere — der Helmholtz-Stumpfschen Theorie herauskommt, ist zwar jetzt noch nicht mit Sicherheit zu sagen, aber zu erwarten. Vor allen Dingen müßte aber die Periodizität der Kurven als erste Forderung hinzugenommen werden.

Literatur.

H. v. Helmholtz, Die Lehre von den Tonempfindungen. Vieweg, Braunschweig, 6. Aufl. (S. 168—193, 197—201).

C. Stumpf, Die Struktur der Vokale. Sitzungsberichte der königl. preuss. Ak. d. Wiss., 1918.

C. Stumpf, Die Sprachlaute. Springer, Berlin 1926.

F. Trendelenburg, Objektive Klangaufzeichnungen mittels des Kondensatormikrophons, I und II. Wissensch. Veröffentl. aus dem Siemens-Konzern. Springer, Berlin, Bd. 3 1924 und Bd. 4 1925.

E. R. Jaensch, Die Natur der menschlichen Sprachlaute. Zeitschr. für Sinnesphysiologie. J. A. Barth, Leipzig 1912.

E. R. Jaensch, Untersuchungen zur Tonpsychologie. Bericht über den 6. Kongreß f. experim. Psych., 1914. J. A. Barth, Leipzig.

H. Lachmund, Vokal und Ton. Zeitschr. f. Psychol., Band 88, 1921. J. A. Barth, Leipzig.

E. R. Jaensch u. G. Rothe, Die psychologische Akustik der Sprachlaute in ihrer Beziehung zu Fragestellungen der Wissenschaften von der Sprache. Zeitschr. f. Psychol., Band 97, 1925. J. A. Barth, Leipzig.

S. Garten, Abhandl. d. sächs. Ak. d. Wiss., Math.-Phys. Klasse, Band 38, Nr. VII—IX, 1021. (Nr. IX zusammen mit F. Kleinknecht). S. Hirzel, Leipzig.

1) E. R. Jaensch, Untersuch. zur Tonpsych., S. 85.

(Eingegangen 8. Oktober 1926.)

Schrödingersche Wellengleichung und vierdimensionale Relativitätsmechanik.

Von J. Kudar.

Schrödinger hat gezeigt[1]), daß die dreidimensionale Wellengleichung mit der Gleichung

$$[H, \psi] - E\psi = 0$$

identisch ist, worin E die Energie, und $[H, \cdot]$ einen linearen Differentialoperator bedeutet, welcher durch die Hamiltonfunktion des klassisch-mechanischen Problems (bis auf eine Symmetrisierung) dadurch bestimmt ist, daß man in die Hamiltonfunktion $H(q_i, p_i)$

$$p_i = K\frac{\partial}{\partial q_i}, \quad p_i^2 = K^2\frac{\partial^2}{\partial q_i^2}, \quad p_i p_k = K^2\frac{\partial^2}{\partial q_i \partial q_k}$$

mit $K = \dfrac{h}{2\pi\sqrt{-1}}$ einsetzt.

Ganz analog werden wir eine vierdimensionale Wellengleichung ableiten, welche für die relativistische Mechanik gültig ist.

Für die vierdimensionalen Bewegungsgleichungen des Elektrons gilt die Lagrangefunktion[2])

$$L = \frac{mc^2}{2}\left[\left(\frac{dx_0}{ds}\right)^2 - \sum_{i=1}^{3}\left(\frac{dx_i}{ds}\right)^2\right] + e\sum_{i=1}^{3}\varphi_i\frac{dx_i}{ds}$$

(x_1, x_2, x_3 = rechtwinklige Koordinaten; $x_0 = ct$; s = Eigenzeit; φ_i = Komponenten des Vierer-potentials.)

Führen wir in die zugehörige Hamiltonfunktion

$$H = \frac{mc^2}{2}\left[\left(\frac{dx_0}{ds}\right)^2 - \sum_{i=1}^{3}\left(\frac{dx_i}{ds}\right)^2\right] = \frac{mc^2}{2}$$

die Impulse

$$p_0 = mc^2\frac{dx_0}{ds} + e\varphi_0$$

$$p_i = -mc^2\frac{dx_i}{ds} + e\varphi_i \quad (i = 1, 2, 3)$$

ein, so folgt

$$(p_0 - e\varphi_0)^2 - \sum_{i=1}^{3}(p_i - e\varphi_i)^2 - m^2c^4 = 0. \quad (1)$$

Hier treten Glieder von der Art: p_i^2, $p_i\varphi_i$ auf.

Um den zur Wellengleichung führenden Differentialoperator zu gewinnen, setzen wir in (1)

$$p_i^2 = K^2\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$$

und (nach einer Symmetrisierung)

$$2p_i\varphi_i = p_i\varphi_i + \varphi_i p_i = K\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\varphi_i + \varphi_i\frac{\partial}{\partial x_i}\right),$$

also

$$2p_i\varphi_i = K\left(\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_i} + 2\varphi_i\frac{\partial}{\partial x_i}\right)$$

ein, wobei $K = \dfrac{ch}{2\pi\sqrt{-1}}$. So ergibt sich aus (1) der Operator

$$[H - m^2c^4, \cdot] = \mathrm{Divgrad} - \frac{4\pi\sqrt{-1}}{ch}e(\Phi\,\mathrm{Grad}) - \frac{4\pi^2}{c^2h^2}\left(e^2\Phi^2 - \frac{ch}{2\pi\sqrt{-1}}e\,\mathrm{Div}\,\Phi - m^2c^4\right), \quad (2)$$

worin

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{Divgrad} &= \frac{\partial^2}{\partial x_0^2} - \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}, \\ (\Phi\,\mathrm{Grad}) &= \varphi_0\frac{\partial}{\partial x_0} - \sum_{i=1}^{3}\varphi_i\frac{\partial}{\partial x_i}, \\ \Phi^2 &= \varphi_0^2 - \sum_{i=1}^{3}\varphi_i^2, \\ \mathrm{Div}\,\Phi &= \frac{\partial\varphi_0}{\partial x_0} - \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_i}. \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

(Wenn Div $\Phi = 0$, so gilt nach den Maxwellschen Gleichungen im Vakuum: Divgrad $\varphi_i = 0$.)

Die Wellengleichung lautet also[1])

$$[H - m^2c^4, \psi] = 0. \quad (4)$$

Nach Einführung einer allgemeinen Punkttransformation in (3) erhalten wir einen invarianten Ausdruck für (4).

1) Ann. d. Phys. **79**, 734. 1926, S. 745—749. Außer Schrödingers Arbeiten vgl. noch: Oskar Klein, Zeitschr. f. Phys. **37**, 895, 1926; V. Fock, ebenda **38**, 242. 1926.

2) Vgl. meine Note: Physik. Zeitschr. **26**, 207, 1925.

1) Dieselbe Wellengleichung habe ich kürzlich aus einer Variationsbedingung abgeleitet. Darüber erscheint demnächst eine Note in den Ann. d. Phys. Vgl. noch die neue Arbeit von V. Fock (Zeitschr. f. Phys. **39**, 226, 1926) sowie die vierte Mitteilung von Schrödinger (Ann. d. Phys. **81**, 109—139, 1926). Schrödinger führt die oben vorgenommene Symmetrisierung für $2p_i\varphi_i$ nicht aus und erhält dementsprechend einen Operator, in dem Div Φ nicht auftritt. (Anmerkung bei der Korrektur.)

(Eingegangen 3. September 1926.)

Bemerkung zu der Arbeit von W. Vogel: „Magnetische Anfangspermeabilität".

Von O. v. Auwers.

W. Vogel[1]) behauptet, daß „kleine Anfangspermeabilität (AP) mit großer Koerzitivkraft und kleiner Maximalpermeabilität (MP) verbunden" sei, der umgekehrte Schluß jedoch,

1) Physik. Zeitschr. **27**, 548, 1926.

„mit großer Maximalpermeabilität auf große Anfangspermeabilität zu schließen, nicht zulässig" sei. Dieser Satz verstößt gegen die Gesetze der Logik, denn wenn (Fig. 1) kleine AP_1 mit kleiner MP_1 zwangsläufig verbunden

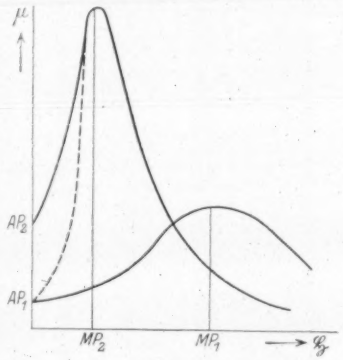


Fig. 1.

sein soll, muß auch große MP_2 mit großer AP_2 verbunden sein, da die Zugehörigkeit einer großen MP_2 zu einer kleinen AP_1 (gestrichelte Kurve) durch die erste Behauptung ausgeschlossen ist. Der Widerspruch ist entstanden aus einer irrtümlichen Verwechslung von AP und MP, denn man darf aus der Tabelle[1]) nur den Schluß ziehen, daß kleine MP_1 mit kleiner AP_1 verbunden ist. Es ist also nicht die gestrichelte Kurve in Fig. 1, sondern die in Fig. 2 ausgeschlossen.

[1]) Gumlich und Rogowski, Ann. d. Phys. 34. 253f., 1911.

Ebenso kann man aus der nur beschränkt gültigen Beziehung von Gumlich

$$\mu_{max} = 0{,}5 \cdot \frac{R}{K}$$

(R = Remanenz, K = Koerzitivkraft) nur bei kleiner MP aus Koerzitivkraft und Remanenz auf kleine AP schließen. Ist der Wert $\frac{R}{K}$ aber groß, erlaubt das Verhältnis keinen Schluß

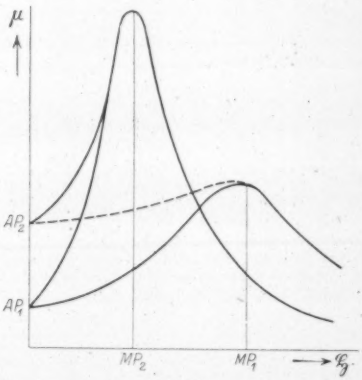


Fig. 2.

auf die AP. Dies klarzustellen, scheint in Anbetracht der Einprägsamkeit der als Regel formulierten Sätze von Vogel wünschenswert.

Berlin-Siemensstadt.

(Eingegangen 11. September 1926.)

VORTRÄGE UND DISKUSSIONEN VON DER 89. VERSAMMLUNG DEUTSCHER NATURFORSCHER UND ÄRZTE IN DÜSSELDORF.

Walther Meißner (Berlin), Der Widerstand von Metallen und Metallkristallen bei der Temperatur des flüssigen Heliums[1]). (Mitteilung aus der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt.)

Im Leidener Kältelaboratorium ist an fünf Metallen bei Temperaturen zwischen 7,2 und 2,5° abs. die Supraleitfähigkeit festgestellt worden, nämlich an Blei, Quecksilber, Zinn, Indium und Thallium. Die Supraleitfähigkeit äußert sich bekanntlich darin, daß unterhalb einer bestimmten Temperatur, die allerdings von Belastungsstrom und dem äußeren Magnetfeld abhängt, der elektrische Widerstand von einem noch durchaus meßbaren Betrag — etwa 1 Proz. oder etwas weniger von dem bei Zimmertemperatur — innerhalb weniger Hundertstel Grad

[1]) Ausführliche Mitteilung siehe: Zeitschr. f. Physik 38, 647, 1926.

Tabelle I. Widerstand von Gold.

He-Dampfdruck mm Hg	T	*Au*-Einkristalle								*Au*-Draht	
		Ring 1b $D = 0.5$ mm; $L = 4$ cm		Ring 4 $D = 0{,}4$ mm; $L = 12$ cm		Stab 5 $D = 0{,}4$ mm; $L = 5$ cm		Stab 11 $D = 2{,}8$ mm; $L = 3.5$ cm		Spule $D = 0{,}3$ mm	
		r beob.	r red.	r beob.	r red.	r beob.	r red.	r beob.	r red.	r beob.	r red.
	273,20°	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
	87,43							0,2553	0,2551		
	84,88									0,2480	0,2471
	83,74		(0,2407)	0,2417	0,2409	0,2414	0,2406		(0,2406)		(0,2421)
	81,76	0,2320	0,2317							0,2341	0,2332
	78,86							0,2189	0,2187		
	20,45		(6,07 . 10^{-3})	6,964 . 10^{-3}	5,83$_0$. 10^{-3}	6,89$_6$. 10^{-3}	5,85$_0$. 10^{-3}		(5,79 . 10^{-3})		(6,03 . 10^{-3})
	20,41	6,42 . 10^{-3}	6,03 . 10^{-3}							7,07 . 10^{-3}	5,99 . 10^{-3}
	20,40							6,01 . 10^{-3}	5,72 . 10^{-3}		
769	4,21							0,29$_1$. 10^{-3}	0,00$_3$. 10^{-3}		
762	4,20	0,59 . 10^{-3}	0	1,14$_6$. 10^{-3}	0,00$_3$. 10^{-3}	1,05$_5$. 10^{-3}	0,00$_3$. 10^{-3}			1,09 . 10^{-3}	0
9.0	1,67			1,14$_1$. 10^{-3}	0,00$_1$. 10^{-3}	1,05$_3$. 10^{-3}	0,00$_1$. 10^{-3}				
7.3	1,61	0,59 . 10^{-3}	0							1,09 . 10^{-3}	0
2.0	1,34							0,29$_1$. 10^{-3}	0		
	0,00°	(0,39 . 10^{-3})	0	1,14$_9$. 10^{-3})	0	(1,05$_2$. 10^{-3})	0	(0,20$_1$. 10^{-3})	0	(1,09 . 10^{-3})	0
	273,2°	$R = 0.37 \cdot 10^{-2}\,\Omega$		$R = 1.31 \cdot 10^{-2}\,\Omega$		$R = 6.02 \cdot 10^{-3}\,\Omega$		$R = 2.47 \cdot 10^{-4}\,\Omega$		$R = 0{,}18\,\Omega$	

auf einen unmeßbar kleinen Betrag abfällt. Der Mechanismus der Supraleitfähigkeit, bei dessen Eintritt z. B. das Ohmsche Gesetz versagt, ist, wie gerade in den letzten Leidener Publikationen[1]) wieder betont wird, noch ungeklärt.

Auch die Untersuchungen, über die ich zu berichten habe, bringen nicht eine Lösung dieses Problems, an dem in Leiden seit über 10 Jahren gearbeitet wird. Aber sie ermöglichen eine Entscheidung, wie ich hoffe, wenigstens in einer Hinsicht, nämlich bezüglich der Frage, ob alle Metalle, wenn sie nur in geeignetem Zustand und in genügend tiefer Temperatur untersucht werden, supraleitend werden können oder nur eine bestimmte Gruppe von Metallen. Es sind ja in Leiden eine große Zahl von Metallen auf Supraleitfähigkeit hin geprüft worden. Aber diese Metalle waren vielfach wenig rein, und vor allem wurden mit einer einzigen Ausnahme[2]) nicht Einkristalle benutzt. Deshalb habe ich eine Reihe sehr reiner Metalle in Drahtform und in Form von Einkristallen bis zu möglichst tiefer Temperatur herab auf den Widerstand hin untersucht. Die Ergebnisse dieser Messungen möchte ich an Hand von Tabellen zeigen, in denen R der gemessene Widerstand und r der auf den Wert 1 bei 0° C ($T = 273{,}20°$ abs.) bezogene Widerstand ist:

Tabelle I gibt Messungen an Einkristallen aus sehr reinem Gold, das weniger als $^1/_{100\,000}$ Verunreinigung hat, wieder. Über solche Messungen habe ich bereits früher[1]) berichtet. Sie wurden jetzt in zweierlei Hinsicht erweitert: Erstens wurden sie noch bis zu etwas tieferen Temperaturen, nämlich bis herab zu 1,3° abs. ausgedehnt. Zweitens wurde ganz besonderes Gewicht darauf gelegt, möglichst vollkommene Kristalle zu untersuchen, deren Gitter nicht irgendwie durch Biegen oder dergleichen gestört wurde. Der kleinste, am Goldkristall 11 gefundene Widerstand war 0,29 Promille von dem bei 0° C. Zwischen dem zu einem Ring von etwa 4 cm Durchmesser gebogenen Kristall 4 und dem der gleichen Schmelze entstammenden umgebogenen Kristall 5 ist kaum ein Unterschied des Widerstandes vorhanden. Auch der gezogene Golddraht hat nach richtiger Alterung nahezu denselben Widerstand wie der Kristall 5.

Aus den Messungen im Temperaturgebiet des flüssigen Heliums läßt sich durch Extrapolation auf $T = 0$ mit großer Genauigkeit der Restwiderstand bei $T = 0$ ermitteln. Nimmt man mit Nernst an, daß dieser Restwiderstand eine bei allen Temperaturen zum eigentlichen Widerstand additiv hinzutretende Größe ist, so erhält man für ideal reines Material die unter r_{red} eingetragenen Werte, die als Grund-

1) G. I. Sizoo, Untersuchungen über den supraleitenden Zustand von Metallen. S. 28. Dissertation Leiden 1926.

2) Ein von W. Wien übersandter natürlicher Kupferkristall wurde bis zu 1,5° abs. herab untersucht, ohne daß er supraleitend wurde. Außerdem wurde das supraleitende Zinn auch als Einkristall geprüft. Siehe W. Tuyn, Dissertation Leiden 1924.

1) W. Meißner, Physik. Zeitschr. **26**, 689, 1925.

Tabelle II. Widerstand von Zink.

He-Dampfdruck mm *Hg*	T	*Zn*-Einkristalle: Stab 1 ∥ hexagonaler Achse (4°) $D = 0{,}7$ mm; $L = 5$ cm		Stab 2 ∥ hexagonaler Achse (16°) $D = 0{,}7$ mm; $L = 3$ cm		Ring 3; ⊥ hexagonaler Achse (89°); $D = 0{,}9$ mm; $L = 12$ cm: 3a		3b		3a und b	
		r beob.	r red.	r beob.	r red.	r beob.	r red.	r beob.	r red.	r beob.	r red.
	273,20°	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
	83,74	0,2351	0,2337	—	—	0,2195	0,2170	0,2198	0,2173	0,2197	0,2172
	20,45	$8{,}73_6 \cdot 10^{-3}$	$6{,}93_9 \cdot 10^{-3}$	—	—	$9{,}05 \cdot 10^{-3}$	$5{,}90 \cdot 10^{-3}$	$9{,}06 \cdot 10^{-3}$	$5{,}91 \cdot 10^{-3}$	$9{,}06 \cdot 10^{-3}$	$5{,}90 \cdot 10^{-3}$
767	4,21	$1{,}85_3 \cdot 10^{-3}$	$0{,}02_3 \cdot 10^{-3}$								
763	4,20			$1{,}41 \cdot 10^{-3}$	—	$5{,}17 \cdot 10^{-3}$	$0{,}00 \cdot 10^{-3}$	$5{,}16 \cdot 10^{-3}$	$0{,}00 \cdot 10^{-3}$	$3{,}18 \cdot 10^{-3}$	$0{,}00 \cdot 10^{-3}$
762	4,20										
9,4	1,68			$1{,}40 \cdot 10^{-3}$	—						
9,0	1,67	$1{,}81_3 \cdot 10^{-3}$	$0{,}00_2 \cdot 10^{-3}$			$3{,}16 \cdot 10^{-3}$	$0{,}00 \cdot 10^{-3}$	$3{,}17 \cdot 10^{-3}$	$0{,}00 \cdot 10^{-3}$	$3{,}18 \cdot 10^{-3}$	$0{,}00 \cdot 10^{-3}$
	0,00°	$(1{,}81_6 \cdot 10^{-3})$	—	$(1{,}40 \cdot 10^{-3})$	—	$(3{,}17 \cdot 10^{-3})$	—	$(3{,}17 \cdot 10^{-3})$	—	$(3{,}18 \cdot 10^{-3})$	—
	273,20°	$R = 7{,}78 \cdot 10^{-3}\ \Omega$		$R = 7 \cdot 10^{-3}\ \Omega$		$R = 6{,}10 \cdot 10^{-3}\ \Omega$		$R = 5{,}57 \cdot 10^{-3}\ \Omega$		$R = 11{,}67 \cdot 10^{-3}\ \Omega$	

He-Dampfdruck mm *Hg*	T	*Zn*-Einkristalle: Stab 4 ⊥ hexagonaler Achse (66°) $D = 0{,}6$ mm; $L = 5$ cm		Band 5 0,1 mm dick; $L = 5$ cm		Stab 67 ⊥ hexagonaler Achse (84,5°) $D = 1{,}3$ mm; $L = 5$ cm		*Zn*-Draht: Ring I, ungealtert $D = 0{,}25$ mm; $L = 12$ cm		Ring II, gealtert $D = 0{,}25$ mm; $L = 12$ cm	
		r beob.	r red.	r beob.	r red.	r beob.	r red.	r beob.	r red.	r beob.	r red.
	273,20°	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
	83,74	0,2221	0,2171	0,2203	0,2179	(0,2195)	(0,2182)	0,2305	0,2251	(0,2305)	(0,2267)
	82,48					0,2141	0,2128			0,2254	0,2216
	20,45	8,94 . 10^{-3}	6,11 . 10^{-3}	9,06 . 10^{-3}	5,96 . 10^{-3}		(5,80 . 10^{-3})	13,97 . 10^{-3}	7,09 . 10^{-3}		
	20,42					7,50 . 10^{-3}	5,77 . 10^{-3}			11,38 . 10^{-3}	6,52 . 10^{-3}
767	4,21					$1{,}75_2 \cdot 10^{-3}$	$0{,}01_3 \cdot 10^{-3}$				
762	4,20	2,91 . 10^{-3}	0,21 . 10^{-3}	3,12 . 10^{-3}	0,00 . 10^{-3}			6,95 . 10^{-3}	0,02 . 10^{-3}		
741	4,14									4,91 . 10^{-3}	0,02 . 10^{-3}
9,0	1,67	2,74 . 10^{-3}	0,04 . 10^{-3}	3,12 . 10^{-3}	0,00 . 10^{-3}	$1{,}74_0 \cdot 10^{-3}$	$0{,}00_1 \cdot 10^{-3}$	6,94 . 10^{-3}	0,01 . 10^{-3}		
	0,00°	$(2{,}70 \cdot 10^{-3})$	—	$(3{,}12 \cdot 10^{-3})$	—	$(1{,}73_9 \cdot 10^{-3})$	—	$(6{,}93 \cdot 10^{-3})$	—	$(4{,}89 \cdot 10^{-3})$	—
	273,20°	$R = 9{,}11 \cdot 10^{-3}\ \Omega$		$R = 5{,}16 \cdot 10^{-3}\ \Omega$		$R = 2{,}18 \cdot 10^{-3}\ \Omega$		$R = 9{,}43 \cdot 10^{-2}\ \Omega$		$R = 9{,}66 \cdot 10^{-2}\ \Omega$	

lage für eine allgemeine Theorie der Leitfähigkeit dienen können.

Tabelle II enthält Messungen an Zink. Es wurden Einkristalle untersucht, die möglichst parallel bzw. senkrecht zur hexagonalen Kristallachse gerichtet waren, ferner ein zu einem Bande ausgezogener Kristall sowie gezogener Draht in ungealtertem und gealtertem Zustand. Die kleinsten Restwiderstände hatten die Kristalle parallel der Achse; aber supraleitend wurden auch sie nicht. Der Restwiderstand des gezogenen Drahtes ist auch nach der Alterung größer als der des Kristalls senkrecht Achse. Das Ausziehen des Kristalls zu einem Bande erhöht den Restwiderstand nicht wesentlich. Auch das Biegen ist von keinem großen Einfluß: Das Stück 3a des Kristalls 3 war gerade gelassen worden, während 3b gebogen wurde, ohne daß sich ihr Widerstandsverhältnis r unterscheidet. Die reduzierten r-Werte sind erhalten, indem der Restwiderstand berücksichtigt und außerdem auf eine genau parallel bzw., senkrecht Kristallachse laufende Richtung umgerechnet wurde. Letzteres geschah in der von Grüneisen und Goens angegebenen Weise[1]).

Tabelle III zeigt den Verlauf des Verhältnisses von $r_\parallel/r_\perp$, sowie des entsprechenden Verhältnisses der spezifischen Widerstände σ. Hierbei ist bei 0° C der von Grüneisen und Goens angegebene Wert $1{,}08_2$ benutzt. Es ist nicht ausgeschlossen, daß $\sigma_\parallel/\sigma_\perp$ noch oberhalb $T = 0$ entsprechend den Vermutungen von Grüneisen und Goens ein Maximum annimmt, da der Wert bei 4,2° abs. wegen der Kleinheit der reduzierten r-Werte keinerlei Sicherheit besitzt.

Tabelle III.

T	$r_\parallel/r_\perp$	$\sigma_\parallel/\sigma_\perp$
273,2°	1	$1{,}08_2$
83,7	1,07	$1{,}16_5$
20,4	1,17	$1{,}26_5$
4,2	(1,77)	(1,91)

Die entsprechenden Messungen an Cadmium enthält Tabelle IV. Die Kristalle 46 und 47 sind Stücke der schon von den Herren Grüneisen und Goens untersuchten gleichbezeichneten Einkristalle. Das Cadmium, das sehr rein ist, wie aus der Kleinheit der Restwiderstände hervorgeht, wird weder als Kristall noch als Draht supraleitend. Die in Leiden an weniger reinem Cadmium in 2 Fällen beobachtete Supraleitfähigkeit ist offenbar, wie schon von Tuyn

1) E. Grüneisen und E. Goens, Zeitschr. f. Physik **62**, 263, Anm. 1, 1924.

Tabelle IV. Widerstand von Cadmium.

He-Dampfdruck mm Hg	T	*Cd*-Einkristalle: Stab 46, hexagonaler Achse (10°), $D = 3{,}2$ mm; $L = 5$ cm: r beob.	*Cd*-Einkristalle: Stab 46: r red.	*Cd*-Einkristalle: Stab 47, $\perp$ hexagonaler Achse (84°), $D = 3{,}9$ mm; $L = 5$ cm: r beob.	*Cd*-Einkristalle: Stab 47: r red.	*Cd*-Draht: Stab I ungealtert, $D = 0{,}2$ mm; $L = 5$ cm: r beob.	*Cd*-Draht: Stab I ungealtert: r red.	*Cd*-Draht: Stab II gealtert, $D = 0{,}2$ mm; $L = 5$ cm: r beob.	*Cd*-Draht: Stab II gealtert: r red.
	273,2°	1		1		1		1	
	82,48	0,2617		0,2542		0,2579		0,2575	0,2570
	20,42	$2{,}20_5 \cdot 10^{-2}$		$1{,}97_6 \cdot 10^{-2}$	$1{,}92_7 \cdot 10^{-2}$	$2{,}09_0 \cdot 10^{-2}$	$2{,}03_2 \cdot 10^{-2}$	$2{,}00_1 \cdot 10^{-2}$	$2{,}02_0 \cdot 10^{-2}$
769	4,21	$1{,}88 \cdot 10^{-4}$	$0{,}31 \cdot 10^{-4}$	$5{,}07 \cdot 10^{-4}$	$0{,}33 \cdot 10^{-4}$				
763	4,20					$6{,}14 \cdot 10^{-4}$	$0{,}25 \cdot 10^{-4}$	$7{,}60 \cdot 10^{-4}$	$0{,}30 \cdot 10^{-4}$
9,4	1,68					$5{,}94 \cdot 10^{-4}$	$0{,}05 \cdot 10^{-4}$	$7{,}36 \cdot 10^{-4}$	$0{,}06 \cdot 10^{-4}$
2,2	1,35	$1{,}5_5 \cdot 10^{-4}$	$0{,}0_3 \cdot 10^{-4}$	$4{,}7_2 \cdot 10^{-4}$	$0{,}0_3 \cdot 10^{-4}$				
	0,00[0]	$(1{,}54 \cdot 10^{-4})$	—	$(4{,}7_2 \cdot 10^{-4})$	—	$(5{,}8_9 \cdot 10^{-4})$	—	$(7{,}30 \cdot 10^{-4})$	—
	273,20°	$R = 5{,}15 \cdot 10^{-4}\,\Omega$		$R = 3{,}45 \cdot 10^{-4}\,\Omega$		$R = 0{,}248\,\Omega$		$R = 0{,}264\,\Omega$	

vermutet wurde, auf Verunreinigung durch Blei zurückzuführen.

Für das Verhältnis von $r_\parallel/r_\perp$ und $\sigma_\parallel/\sigma_\perp$ ergibt sich Tabelle V, in der der Wert bei 4,2° abs. auch wieder wegen der Kleinheit der reduzierten ε-Werte unsicher ist. Die Tabelle V stimmt gut mit den Resultaten von Grüneisen und Goens überein.

Tabelle V.

T	$r_\parallel/r_\perp$	$\sigma_\parallel/\sigma_\perp$
273,2°	1	1,10
83,4	1,03	1,25
20,4	1,14	1,36
4,2	(0,97)	(1,16)

Tabelle VI gibt Messungen an gezogenen Drähten aus Platin, Nickel, Eisen und Silber wieder. Besonders das Platin — dasselbe, das von mir früher auf Wärmeleitfähigkeit untersucht wurde — ist sehr rein und weist den kleinsten je beobachteten Restwiderstand auf. Der Restwiderstand des besten in Leiden untersuchten Platins ist etwa 10mal so groß. Das untersuchte Eisen hat noch nicht befriedigende Reinheit, ist aber auch sehr viel reiner als das in Leiden geprüfte. Trotz der größeren Reinheit wird keines der 4 Metalle supraleitend.

Überblickt man die mitgeteilten Versuchsergebnisse, so muß man sagen, daß weder große Reinheit noch der gleichförmigste Kristallzustand an sich den Eintritt der Supraleitfähigkeit ermöglichen. Man könnte vielleicht daran denken, daß die Supraleitfähigkeit noch unterhalb 1,3° abs. eintreten könnte; doch dürfte die Wahrscheinlichkeit hierfür gering sein, da ja alle Eigenschaften in der Nähe des absoluten Nullpunktes konstant werden müssen. Übrigens weisen alle untersuchten Metalle im Temperaturgebiet des flüssigen Heliums noch eine Widerstandsänderung auf, die der Größenordnung nach durchaus dem nach Grüneisens Widerstandsformel zu Erwartenden entspricht. Dies deutet auch darauf hin, daß man sich im Gebiet des normalen Widerstandsverlaufs, nicht in der Nähe des Eintritts von Supraleitfähigkeit, befindet.

Nach allem muß man also wohl sagen, daß aller Wahrscheinlichkeit nach nicht alle Metalle supraleitend werden, sondern nur eine bestimmte Gruppe von Metallen, und man wird sich nun zuversichtlicher der Aufklärung der Gründe zuwenden können, die bei dieser Gruppe für das Zustandekommen der Supraleitfähigkeit maßgebend sind.

Tabelle VI. Widerstand von Platin, Nickel, Eisen und Silber.

He-Dampfdruck mm Hg	T	Pt I $D = 2{,}0$ mm; $L = 6{,}5$ cm r beob.	Pt I $D = 2{,}0$ mm; $L = 6{,}5$ cm r rel.	Ni III $D = 0{,}5$ mm; $L = 5$ cm r beob.	Ni III $D = 0{,}5$ mm; $L = 5$ cm r rel.	Fe I $D = 0{,}2$ mm; $L = 5$ cm r beob.	Fe I $D = 0{,}2$ mm; $L = 5$ cm r rel.	Ag I $D = 0{,}5$ mm; $L = 5$ cm r beob.	Ag I $D = 0{,}5$ mm; $L = 5$ cm r rel.
	273,20°	0,250	1	0,1179	1	0,1169	1	0,2349	1
	91,4		0,248	0,1135	0,1135	0,0974	0,0974	0,1974	0,2297
	87,43			0,0919$_8$	0,0873	0,0919$_1$	0,0719	0,1974	0,1919
	78,86			0,0919$_8$	$1{,}61_0 \cdot 10^{-3}$	$22{,}82 \cdot 10^{-3}$	$1{,}50 \cdot 10^{-3}$	$10{,}03 \cdot 10^{-3}$	$3{,}23 \cdot 10^{-3}$
	20,40	$6{,}0_7 \cdot 10^{-3}$	$4{,}44 \cdot 10^{-3}$	$6{,}62_4 \cdot 10^{-3}$	$0{,}55_4 \cdot 10^{-3}$	$21{,}60 \cdot 10^{-3}$	$0{,}95 \cdot 10^{-3}$	$6{,}82_4 \cdot 10^{-3}$	$0{,}93_7 \cdot 10^{-3}$
769	4,21	$1{,}68 \cdot 10^{-3}$	$0{,}04 \cdot 10^{-3}$	$5{,}07_8 \cdot 10^{-3}$					
767	4,21	$1{,}65 \cdot 10^{-3}$	$0{,}01 \cdot 10^{-3}$						
2,2	1,35			$5{,}02_7 \cdot 10^{-3}$	$0{,}00_2 \cdot 10^{-3}$	$21{,}56 \cdot 10^{-3}$	$0{,}01 \cdot 10^{-3}$	$6{,}79_1 \cdot 10^{-3}$	$0{,}00_4 \cdot 10^{-3}$
2,0	1,34								
	0,00°	$(1{,}64 \cdot 10^{-3})$	—	$(5{,}02 \cdot 10^{-3})$	—	$(21{,}55 \cdot 10^{-3})$	—	$(6{,}78_5 \cdot 10^{-3})$	—
		$K = 1{,}911 \cdot 10^{-3}\ \Omega$		$K = 1{,}80_1 \cdot 10^{-3}\ \Omega$		$K = 1{,}49_1 \cdot 10^{-1}\ \Omega$		$K = 3{,}95_1 \cdot 10^{-3}\ \Omega$	
	273,20°								

Zum Schluß möchte ich noch hervorheben, daß die Untersuchung durch die Notgemeinschaft der deutschen Wissenschaft unterstützt wurde, die insbesondere eine Siemenssche Pumpe von 2,4 m^3 Saugleistung pro Minute zum Abpumpen des Heliumdampfes zur Verfügung stellte. Auch an dieser Stelle möchte ich hierfür meinen Dank zum Ausdruck bringen.

R. Seeliger (Greifswald), Die Entwicklung des Lichtbogens. (Nach Versuchen gemeinsam mit J. Schmekel.)

Die Bogenentladung unterscheidet sich von der Glimmentladung grundsätzlich nur durch die Vorgänge an der Kathode. In beiden Entladungsformen liegt zwar vor dieser ein Gebiet positiver feldbestimmender Raumladung und demgemäß ein Kathodenfall, in der Glimmentladung werden aber die Elektronen aus der (kalten) Kathode lediglich durch Ionenstoß (und vielleicht in geringer Menge durch einen photoelektrischen Effekt) ausgelöst, während in der Bogenentladung eine sehr viel intensivere Elektronenbefreiung durch thermische Effekte (und vielleicht auch durch das starke Feld) stattfindet. In dem Maße, wie mit der Zunahme der Stromstärke sich die Kathode erwärmt, nimmt ihre Elektronenemission zu und der Kathodenfall sinkt von dem hohen anomalen Wert der Glimmentladung ab bis zu Werten, die bald erheblich unter dem des normalen Kathodenfalls liegen und endlich in den für den Bogen charakteristischen Endwert übergehen. Unter den nötigen Vorsichtsmaßregeln gelingt es, den kontinuierlichen Übergang der Glimmentladung in die Bogenentladung zum größten Teil zu stabilisieren und messend durch Aufnahme der Charakteristik zu verfolgen; ich habe a. a. O. bereits über diese Dinge zusammenfassend berichtet[1]). Nun ist bekanntlich an der Kathode der Glimmentladung, solange die Kathodenoberfläche noch nicht vollständig von der Entladung bedeckt ist, die Stromdichte konstant, d. h. unabhängig von der Stromstärke und steigt erst nach vollständiger Bedeckung proportional mit der Stromstärke weiter an. Andererseits ist im Zustand der Bogenentladung die Kathode wiederum nicht vollständig bedeckt und es ist auch die Stromdichte wiederum konstant, da die bedeckte Fläche — der sog. Brennfleck — proportional mit der Stromstärke wächst. Wir haben also die merkwürdige Tatsache einer mit zunehmender Stromstärke erst unvollständigen, dann vollständigen, dann aber wieder unvollständigen Bedeckung der Kathodenoberfläche. Wenn wir uns dies graphisch veranschaulichen, erhalten wir schematisch die in Fig. 1 gezeichnete Abhängigkeit der Stromdichte j von der Stromstärke. Da die Stromdichtewerte nicht nur von der Form und dem Material der Kathode, sondern auch vom Gasdruck abhängen — für die sog. normale Stromdichte der Glimmentladung ist dies schon lange bekannt, für den Brennfleck haben diese Abhängigkeit kürzlich Herr Schmekel und ich untersucht[1]) — ist eine maßstäblich richtige Wiedergabe nicht ohne weiteres zu geben und die Fig. 1 nur als ein die wesentlichen Züge enthaltendes Schema zu betrachten.

Der oben erwähnte stetige Übergang der Glimmentladung in die Bogenentladung legt nun die Vermutung nahe, daß auch der Brennfleck

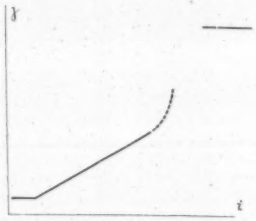


Fig. 1.

mit Steigerung der Stromstärke sich allmählich aus der vollständigen Bedeckung des anomalen Kathodenfalls entwickelt, d. h. also in dem Schema der Fig. 1, daß sich tatsächlich die Stromdichtekurve in der punktiert eingezeichneten Weise fortsetzt. Diese Entwicklung zu verfolgen, ist uns denn auch durch Wahl der richtigen Versuchsbedingungen gelungen. Eine Bedingung besteht, wie dies aus der fallenden Form der Charakteristik selbstverständlich ist, darin, daß man mit möglichst hoher Spannung und möglichst großem Vorschaltwiderstand arbeitet. Als ebenso wichtig hat sich aus den Vorversuchen ergeben, daß man alle Umstände vermeidet, die zu der vorzeitigen Konzentration der Entladung in einem Brennfleck führen können. Die Kathodenoberfläche muß dazu peinlichst sauber sein, es dürfen keinerlei „bogenbildende“ Substanzen, d. h. Substanzen mit großer thermischer Elektronenemissivität in der Nähe der Kathode vorhanden sein und endlich muß das Füllgas wahrscheinlich absolut sauerstoffrei sein. Diese Bedingungen lassen sich mit der hier notwendigen Strenge erfüllen,

1) Physik. Zeitschr. **27**, 22, 1926.

1) Erscheint demnächst in dieser Zeitschrift.

wenn man als Kathode einen Tropfen Quecksilber auf einem Quarzrohr benutzt, das im Vakuum in die Apparatur hineindestilliert ist und als Füllgas z. B. reinsten Stickstoff oder am besten (wegen der Nitridbildung) ein Edelgas verwendet. Die endgültige Form des Entladungsgefäßes ist in Fig. 2 gezeichnet. Es

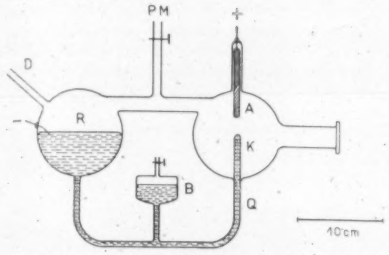


Fig. 2.

bedeutet darin K die Kathode auf dem Quarzrohr Q, A die Anode (aus Eisen), R ein mit dem Entladungsraum zum Zweck des Druckausgleiches in Verbindung stehendes Vorratsgefäß, das durch D mit dem Rückflußkühler der Destillationseinrichtung in Verbindung steht und B ein zweites Vorratsgefäß unter Überdruck für die Feineinstellung der Quecksilberkuppe; die Leitung PM führt zur Pumpe und zum Manometer. Als Spannungsquelle stand uns eine Vartabatterie von 3000 Volt zur Verfügung, die noch mit einer Hochspannungsdynamo von 3500 Volt in Serie geschaltet werden konnte, leider jedoch nur zu gewissen Tageszeiten, in denen die Erregernetzspannung die für diese sehr diffizilen Versuche erforderliche Konstanz besaß. Als Widerstände bewährten sich ein wassergekühlter Jodkadmiumwiderstand und eine Serie von Silitstäben.

Unter den genannten Bedingungen beobachtet man dann an der Kathode bei langsamer Steigerung des Stromes die folgenden Erscheinungen. Zunächst ist die Kathode nur zum Teil bedeckt, das Glimmlicht hat die Farbe der Emission des mit Quecksilberdämpfen gemischten Füllgases und der Kathodenfall ist normal. Sobald die Kathode vollständig bedeckt ist, steigt die Klemmspannung zunächst etwas an, da der Kathodenfall nun anomale höhere Werte annimmt, die Farbe des Glimmlichtes geht mehr und mehr über in die des weißen Hg-Lichtes. Bald aber beginnt die Klemmspannung zu sinken und nimmt kontinuierlich ab, die Kathode erstrahlt in blendend weißem Licht, und es erscheint über ihr die stark kontrahierte positive Säule. Ist der Druck des Füllgases nicht zu tief (etwa 10 cm), so beginnt nun aber bei einer Stromstärke von etwa 10 Milliamp. sich die Bedeckung von dem Quarzrohr abzulösen und sitzt dann wie eine scharfbegrenzte weißglühende Kappe auf dem oberen Teil des Kathodentropfens (photographische Aufnahme auf Tafel V). Diese Kappe zieht sich mehr und mehr zusammen, die Klemmspannung sinkt weiter, bis die Stabilisierung nicht mehr ausreicht und nun plötzlich im Inneren der Kappe irgendwo der noch viel kleinere und unruhig auf dem Tropfen umherwandernde Brennfleck mit dem (z. B. aus den Hg-Gleichrichtern bekannten) typischen Aussehen entsteht. Damit ist jedenfalls das Wesentliche, nämlich der Übergang der vollständigen anomalen Kathodenbedeckung in eine wiederum nur teilweise Bedeckung und dies wichtigste Anfangsstadium der Brennfleckentwicklung gegeben. Bemerkt sei noch, daß wir ganz analoge Erscheinungen dann auch an einer Kathode aus gereinigter und entgaster Kohle erhalten konnten; auf die Einzelheiten werden wir an anderer Stelle eingehen. Die Fläche der Kappe konnte an einem Okularmikrometer eines schwach vergrößernden Mikroskops gemessen werden; da die Kappe selten ganz ruhig sitzt, sondern auf der Oberfläche des Kathodentropfens langsam sich dreht, werden photographische Aufnahmen quantitativ genauere Werte liefern können. Es mag hier das in der Fig. 3 gezeichnete Beispiel

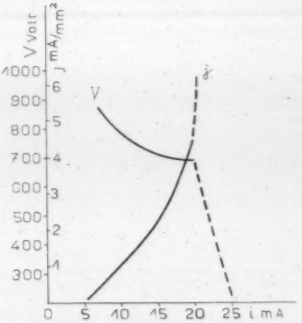


Fig. 3.

einer Messung genügen, aus dem die allmähliche Zusammenziehung der Kappe und die Vergrößerung der Stromdichte zu ersehen ist. Aufgetragen sind in Abhängigkeit von der Stromstärke die Stromdichte in der sich kontrahierenden Kappe und die Klemmspannung der Entladung. Zum Schluß reicht die Stabilisierung nicht mehr

aus, die Kappe zieht sich plötzlich zusammen und zugleich fällt die Spannung steil ab; die Bogenbildung ist dann vollendet.

R. Seeliger (Greifswald). Über die Temperatur des Gases in Entladungsröhren. (Nach Versuchen gemeinsam mit H. Strehler.)

Die wichtige Frage, wie hoch die wahre Temperatur des Gases in einer Entladungsröhre ist und wie weit man sie mit eingeführten Thermoelementen messen kann, hat bekanntlich von verschiedenen Seiten eine ganz verschiedene Beantwortung gefunden. Während einige Forscher die Ansicht vertreten, daß die Temperatur z. B. in der positiven Säule stets eine sehr hohe sei und Thermoelemente auch unter allen Vorsichtsmaßregeln nicht einmal der Größenordnung nach die richtigen Werte liefern, sind andere zu dem Ergebnis gekommen, daß man die Gastemperatur recht genau messen kann und daß sie — von extremen Fällen wie z. B. in der Bogensäule natürlich abgesehen — durchaus nicht hoch ist und etwa 100 Grad kaum überschreitet. Wir haben nun versucht, nach einer neuen Methode hier Klarheit zu schaffen. Einerseits messen wir die Temperatur und zwar die Verteilung derselben über den Querschnitt einer in einem zylindrischen Rohr erzeugten ungeschichteten Säule mit verschiebbaren Thermoelementen, andererseits benutzen wir das ganze Entladungsrohr als ein Gasthermometer konstanten Volumens und berechnen aus der mit der Entladung verbundenen Drucksteigerung die mittlere Gastemperatur. Die ersteren Messungen erlauben diese Drucksteigerung ebenfalls zu berechnen und der Vergleich der nach den beiden Methoden erhaltenen Werte ermöglicht dann unmittelbar zu beurteilen, wie weit die Angaben der Thermoelemente der Wirklichkeit entsprechen. Bedingung für die Anwendbarkeit dieser Methode ist, daß die positive Säule den überwiegenden Teil des Entladungsrohres erfüllt und alle Toträume möglichst vermieden werden. Notwendig ist ferner die Benutzung eines genügend empfindlichen und dabei von Quecksilberdämpfen freien sowie kein großes Volumen beanspruchenden Manometers. Die erstere Bedingung läßt sich, da man die positive Säule bekanntlich beliebig lang machen kann, beliebig genau erfüllen und die Genauigkeit hängt nur ab von der zur Verfügung stehenden Spannung, die zur Überwindung des Spannungsabfalls in einer langen Säule notwendig ist. Die zweite der genannten Bedingungen konnten wir erfüllen mit Hilfe eines nach früheren Erfahrungen konstruierten Plattenmanometers[1]), dessen druckempfindlicher Teil aus einer in einer Metallbüchse eingespannten dünnen Glimmerplatte bestand. Auf diese ist in dem (durch eine einfache Rechnung zu ermittelnden) günstigsten Abstand vom Zentrum ein kleiner Spiegel befestigt, dessen Drehung infolge einer Durchbiegung der Platte mit Fernrohr und Skala beobachtet wird. Das Manometer wird mit einem Mc Leod geeicht. Günstig ist es, der Platte durch einen einseitigen Überdruck eine geringe Vorspannung zu geben; die Empfindlichkeit unseres Manometers beträgt dann bei günstigster Vorspannung etwa $^1/_{100}$ mm Hg, läßt sich aber wohl sicher noch erheblich steigern.

1) Zeitschr. f. techn. Phys. 1, 20, 1920.

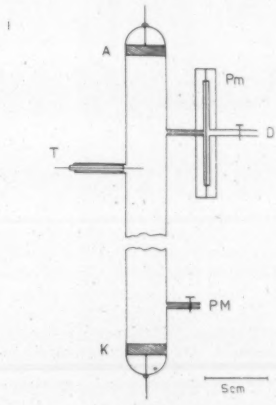


Fig. 4.

Die benutzte Entladungsröhre ist in Fig. 4 schematisch gezeichnet und wohl ohne weiteres verständlich. Bemerkt sei noch, daß alle Zuführungen kapillare Weite hatten und daß wir die verschiedensten Arten von Thermoelementen ausprobiert haben. Die Thermoelemente waren hergestellt aus Drähten von 0,02 mm Dicke und teils frei, teils in ein ganz dünnes Glasröhrchen eingeschlossen in die Entladung eingeführt. Einige Schwierigkeiten machte es, die Einführung so vorzunehmen, daß die für die Rechnung notwendige axiale Symmetrie der Temperaturverteilung nicht gestört wurde; es gelang dies zu erreichen durch eine vollkommen symmetrische Ausbildung der ganzen Anordnung. Bei freien Thermoelementen hat man natürlich auf äußerst sorgfältige Isolation des Meßstromkreises zu achten, um die Ergebnisse nicht durch Zweigströme zu verfälschen. Die besten Erfolge hatten wir bisher mit eingeschlossenen Thermoelementen, deren Benutzung zudem sehr einfach

ist und keinerlei besondere Vorsichtsmaßregeln erfordert. In Edelgasen stimmen innerhalb der Fehlergrenzen (von insgesamt 10 Proz.) die manometrisch und die mit Thermosonden bestimmten Temperaturen überein und zwar liegen die Einzelwerte der Differenzen nach beiden Seiten gleichmäßig in einem Bereich von etwa ± 5 Proz. verteilt, so daß man bei Scheiteltemperaturen von 30—80 Grad (je nach der Stromstärke der Entladung) eine Temperaturbestimmung mit einer Genauigkeit von etwa 1 Grad erreichen kann. In Wasserstoff scheinen systematische Abweichungen vorhanden zu sein, die von der Art der benutzten Thermosonden und von dem Trockenheitsgrad des Gases abhängen; wir erklären sie als Folgeerscheinungen einer teilweisen Dissoziation des Wasserstoffs durch die Entladung und werden vielleicht den Dissoziationsgrad hier anknüpfend bestimmen können.

Der Notgemeinschaft und der Helmholtzgesellschaft sowie hinsichtlich der zur Durchführung der ersten Arbeit notwendigen Mittel dem Elektrotechnischen Verein Berlin haben wir für entgegenkommendste Unterstützung zu danken. Die beiden Arbeiten werden fortgesetzt und sollen nach Abschluß ausführlicher veröffentlicht werden.

Diskussion.

Herr Töpler: Ein kontinuierliches Zusammenziehen der Strombahn durch Stromverstärkung tritt für Atmosphärendruck an Anodenkugeln beim Übergange von Glimmentladung in gestielte Büschelentladung ein. Dieser Vorgang wird dadurch veranlaßt, daß bei hinreichender Stromdichte die beim Glimmen ansteigende Charakteristik im Entladungsraum vor der Anode mehr und mehr in fallende (Stiel des Büschels) übergeht unter Beihilfe von Gasströmungen. Ist an Ähnliches bei dem vom Vortragenden behandelten Falle zu denken, vielleicht unter Mitwirkung der Metalldampfbildung bei genügender Stromdichte, begünstigt durch den niedrigen Gasdruck?

Herr Seeliger: Die Metallverdampfung spielt keine ausschlaggebende Rolle, entscheidend ist vermutlich eine Ausbildung oder Umschichtung von Raumladungen.

Ludwig Flamm (Wien), Beiträge zur Wellenmechanik in nichtstationären Feldern.

L. de Broglie, A. Einstein und insbesondere E. Schrödinger haben die Wellenmechanik in jüngster Zeit in erfolgreicher Weise zur Erklärung der Quantenerscheinungen herangezogen. Auch hat E. Schrödinger in der zweiten Mitteilung seiner Arbeiten „Quantisierung als Eigenwertproblem“[1] bereits die Rolle der Wellenmechanik in der klassischen Physik auseinandergesetzt. Demnach hat schon Hamilton die nach ihm benannten Sätze der Dynamik auf Grund optischer Analogien gefunden. Diesen Ideenkreis in seiner vollsten Allgemeinheit zu rekonstruieren, mag darum jetzt von Wichtigkeit sein.

Im Falle nichtstationärer Felder muß man voraussetzen, daß die Hamiltonsche Funktion auch die Zeit explizit enthält, so daß man für die Gesamtenergie W hat:

$$W = H(q_i, p_i, t).$$

Zur Hamilton-Jacobischen Integrationsmethode wird man durch den Ansatz geführt

$$W = -\frac{\partial S^*}{\partial t}, \quad p_i = \frac{\partial S^*}{\partial q_i}, \tag{1}$$

welcher Energie und Impuls auf eine einzige Wirkungsfunktion S^* zurückführt. Dies gibt oben eingesetzt die Hamiltonsche Partielle Differentialgleichung (H. P.)

$$\frac{\partial S^*}{\partial t} + H\left(q_i, \frac{\partial S^*}{\partial q_i}, t\right) = 0.$$

Ein vollständiges Integral derselben hat die Gestalt

$$S^* = S^*(q_i, t, \alpha_i)$$

mit den willkürlichen Integrationskonstanten α_i. Die Hamilton-Jacobische Integrationsmethode läßt sich deuten durch Wellen von der Gestalt

$$\psi = a \sin \frac{2\pi}{h} \Phi.$$

Ihre Phase ist gegeben durch

$$\Phi = S^*(q_i, t, \alpha_i) - \Theta(\alpha_i),$$

wobei Θ eine willkürliche Funktion der α_i bedeutet. Die Konstante h ist das Plancksche Wirkungsquantum, spielt aber in der klassischen Mechanik keine Rolle. Für jede spezielle Wahl der willkürlichen Integrationskonstanten α_i erhält man so eine bestimmte Schar fortschreitender Wellen. Eine Gruppe solcher Wellenscharen, welche durch die Werte der α_i innerhalb eines engen Bereiches bestimmt ist, schwächt sich, wie ich anderwärts gezeigt habe[2]), im allgemeinen durch Interferenz bis auf die Umgebung einer Stelle, welche nach E. Schrödinger dadurch bestimmt ist, daß alle Wellen der Gruppe dort in Phasenübereinstimmung sich befinden. Dieses

1) Ann. d. Physik (4) **79**, 489, 1926.
2) Die Grundlagen der Wellenmechanik. Physik. Zeitschr. 27, 600, 1926. Die neue Mechanik. Naturwissenschaften 14, 1926.

Interferenzmaximum ist demzufolge durch die Formeln gegeben:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial a_i} = 0.$$

Durch Einsetzen des Ausdruckes für Φ erhält man weiter

$$\frac{\partial S^*}{\partial a_i} - \frac{\partial \Theta}{\partial a_i} = 0.$$

Es sind die Größen

$$\frac{\partial \Theta}{\partial a_i} = \beta_i$$

selbst wieder willkürliche Konstanten. Das Energiequantum der betrachteten Wellengruppe ist demzufolge um eine Stelle konzentriert, welche den Gleichungen genügt:

$$\frac{\partial S^*}{\partial a_i} = \beta_i.$$

Das ist gerade der zweite Ansatz von Gleichungen der Hamilton-Jacobischen Integrationsmethode, welche die Bewegung eines mechanischen Systems vollständig bestimmen. Die die Wellengruppe erzeugenden einzelnen Wellenscharen werden von L. de Broglie einfach als Phasenwellen bezeichnet.

Auf diese Phasenwellen soll nunmehr auch das Fermatsche Prinzip angewendet werden. Dieses wird man vom Standpunkt der Wellentheorie mit L. de Broglie[1]) zweckmäßiger so aussprechen, daß die Strahlenbewegung durch die Bedingung bestimmt ist:

$$\delta \int_P^{P'} d\Phi = 0 \qquad (2)$$

zwischen irgend zwei festgehaltenen Raum-Zeitpunkten P und P'; denn eine von einem Punkt A zur Zeit t ausgehende Wellengruppe wird sich in einem Punkte A' zur Zeit t' nur dann nicht schwächen, wenn Phasenübereinstimmung herrscht. Für die Phasenwellen ergibt sich weiter:

$$\delta \int_P^{P'} d\Phi = \delta (S^{*\prime} - S^*).$$

Im Hinblick darauf, daß die Raum-Zeitpunkte P und P' bei der Variation festzuhalten sind, gibt das Fermatsche Prinzip (2) weiter

$$\sum \left(\frac{\partial S^{*\prime}}{\partial a_i} - \frac{\partial S^*}{\partial a_i} \right) \delta a_i = 0.$$

Nun sind die δa_i vollkommen willkürlich und voneinander unabhängig, so daß notwendig die Gleichungen folgen

$$\frac{\partial S^{*\prime}}{\partial a_i} = \frac{\partial S^*}{\partial a_i} = \text{Const},$$

also das zweite System von Gleichungen der Hamilton-Jacobischen Integrationsmethode auch aus dem Fermatschen Prinzip als Folgerung sich ergibt. Andererseits erhält man für das Differential

$$d\Phi = dS^* = \sum \frac{\partial S^*}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial S^*}{\partial t} dt$$

zufolge des ersten Systems von Gleichungen der Hamilton-Jacobischen Integrationsmethode (1)

$$d\Phi = \Sigma p_i dq_i - W dt.$$

Nun gilt für die Lagrangesche Funktion die Formel

$$L = \Sigma p_i \dot{q}_i - W,$$

so daß man weiter schreiben kann:

$$d\Phi = L\, dt.$$

Dadurch geht das Fermatsche Prinzip (2) für die Phasenwellen direkt in das Hamiltonsche Prinzip über

$$\delta \int_t^{t'} L\, dt = 0$$

zwischen fixen Raum-Zeitgrenzen.

Eigentlich ist es verwunderlich, daß diese kraftvollen, schon von Hamilton entwickelten Ideen bis vor kurzem nur vereinzelt Anklang fanden, wie beispielsweise bei Felix Klein. Doch hat offenbar erst das spezielle Relativitätsprinzip durch seine Identifizierung von Materie und Energie diesen Vorstellungen eine tiefere Bedeutung verliehen. Nach der Wellenmechanik ist die Dynamik der Materie durch die Strahlenbewegung der Phasenwellen gegeben, also den durch diese hervorgerufenen Energietransport. Der Zusammenhang zwischen Wellenausbreitung und Strahlenbewegung ist im allgemeinen ein verwickelter. Dieser soll für den Spezialfall des Einelektronenproblems näher diskutiert werden. Es ist die Strahlenbewegung nach Richtung und Geschwindigkeit durch den Vektor $\mathfrak{v}$ der Elektronengeschwindigkeit gegeben. Man hat im allgemeinsten Falle das äußere Feld als durch ein skalares Potential V und ein Vektorpotential $\mathfrak{A}$ bestimmt vorauszusetzen. Die Richtung der Wellennormale ist parallel dem Gesamtimpulsvektor

$$m\mathfrak{v} + \frac{e}{c}\mathfrak{A}.$$

Demzufolge haben nur in rein elektrischem Felde, also für

$$\mathfrak{A} = 0,$$

Wellenstrahl und Wellennormale die gleiche Richtung. Sonst im elektromagnetischen Felde, also für

$$\mathfrak{A} \neq 0,$$

haben Wellenstrahl und Wellennormale im allgemeinen verschiedene Richtung. Zur Berechnung

1) Thèses. Paris 1924, S. 32.

der Normalgeschwindigkeit u der Wellenausbreitung findet bereits L. de Broglie, der sie als Phasengeschwindigkeit bezeichnet, die Formel

$$\frac{W}{u} = \left| m\mathfrak{v} + \frac{e}{c}\mathfrak{A} \right| .$$

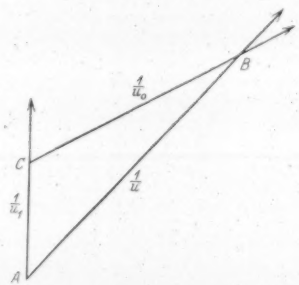
Sie zeigt, daß in einem rein elektrischen Felde, also für

$$\mathfrak{A} = 0,$$

u in irgendeinem Punkte nur von dem Betrag von $\mathfrak{v}$ und nicht von seiner Richtung abhängt, somit Isotropie vorhanden ist. Sonst hingegen im elektromagnetischen Felde, also für

$$\mathfrak{A} \neq 0,$$

ändert sich u, wie die Formel zeigt, auch mit der Orientierung von $\mathfrak{v}$ gegen $\mathfrak{A}$; es herrscht



Anisotropie. Bezeichnet man für den isotropen Fall entsprechend

$$\mathfrak{A} = 0$$

die Phasengeschwindigkeit mit u_0, so gilt

$$\frac{W}{u_0} = \left| m\mathfrak{v} \right| .$$

Bezeichnet man für den anisotropen Zusatz entsprechend

$$\mathfrak{v} = 0$$

die Phasengeschwindigkeit mit u_1, so ergibt sich

$$\frac{W}{u_1} = \left| \frac{e}{c}\mathfrak{A} \right| .$$

Dann läßt sich die allgemeine Formel so interpretieren, daß sich die reziproken Phasengeschwindigkeiten

$$\frac{1}{u}, \frac{1}{u_0}, \frac{1}{u_1},$$

was Hamilton als Langsamkeit bezeichnet, in der gezeichneten Weise zum Dreieck ABC zusammenfügen. Es hat $\overrightarrow{AC}$ die Orientierung des Vektors $e\mathfrak{A}$, $\overrightarrow{CB}$ die Richtung des Strahles und $\overrightarrow{AB}$ die Richtung der Wellennormale. Ein Modell, welches eine ums Zentrum C sich drehende Kurbel CB darstellt, durch deren Endpunkt B eine um den exzentrischen Punkt A drehbare Leiste zwangläufig geführt ist, bringt die Abhängigkeit von Strahl und Welle zum Ausdruck. (Das Modell wird demonstriert.)

Diskussion.

Herr F. Noether: Die vorgetragenen Gleichungen beziehen sich nicht auf die eigentliche Schrödingersche Theorie, die von der partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung ausgeht, sondern nur auf ein Zwischenglied zwischen der klassischen Mechanik und der neuen Theorie.

Georg Stetter (Wien), Massenbestimmung von Atomtrümmern.

Seit der Zertrümmerung des Stickstoffkerns durch Rutherford im Jahre 1919 sind durch die Arbeiten der Cambridger und Wiener Physiker zu diesem Problem eine Menge experimenteller Tatsachen zutage gefördert worden, die interessante theoretische Folgerungen sowie neue Arbeitshypothesen ermöglichten. Wohl die naheliegendste, aber lange nicht klar beantwortete Frage war die nach dem Charakter der bei der Zertrümmerung ausgeschleuderten Teilchen. Wir werden uns zunächst zufrieden geben, wenn wir den Quotienten e/m (Ladung: Masse) bestimmen können: einer schließlichen Festlegung der Masse durch eine Absolutbestimmung der Ladung (elektrometrisch) stehen ja keine prinzipiellen Schwierigkeiten entgegen. Im übrigen ist die Zahl vernünftiger Annahmen für den Wert von e ohnehin nicht groß.

Zu dem Werte e/m gelangt man bekanntlich, indem man die Ablenkung des bewegten Teilchens im elektrischen und im magnetischen Felde mißt. Eine zu diesem Zwecke geschaffene Versuchsanordnung habe ich vor etwa einem Jahre in der Zeitschr. f. Physik[1]) beschrieben. Hier müssen einige Andeutungen genügen. Die Eigenart der Aufgabe bringt ihre besonderen Schwierigkeiten mit sich: vor allem die ungeheuer kleine Intensität (einzelne Atome) der zu messenden Strahlung. Die große Härte der Strahlen erfordert hohe elektrische Feldstärken, diese wieder ein ausgezeichnetes Vakuum; die Schwierigkeiten, die in der Beobachtung nach der Szintillationsmethode an sich liegen, wurden durch die an den Wiener Instituten gesammelten Erfahrungen verhältnismäßig leicht überwunden.

1) Zeitschr. f. Physik 34. 158, 1925.

Der erste Punkt (Intensität) war ausschlaggebend für die Wahl der Methode: Aston's Anordnung bietet ja nicht nur den Vorteil, daß man e/m (und somit m) direkt aus einem Versuch erhält (Massenspektrograph), sondern den hier viel bedeutsameren einer Energiekonzentration am Punkte der Beobachtung dadurch, daß Strahlen verschiedener Geschwindigkeit in diesem „Brennpunkt" vereinigt werden. Die Ablenkung erfolgt bekanntlich in beiden Feldern in der gleichen Ebene (mit verschiedenem Vorzeichen): dies ermöglicht die Verwendung einer linearen Strahlungsquelle, also einer größeren Strahlenmenge als bei einem Punktstrahler. Trotzdem wäre die Ausbeute an beobachtbaren Strahlen noch viel zu gering, um eine erfolgreiche Zählung zu ermöglichen, wenn nicht einige spezielle Details hier eine wesentliche Verbesserung gebracht hätten: ein Spaltsystem besonderer Konstruktion, das bei kleiner Bildbreite relativ große Intensität gibt; die Erfassung eines möglichst großen Geschwindigkeitsbereiches unter Verzicht auf übermäßige Genauigkeit (Anordnung der Blende); Stellung des Szintillationsschirmes senkrecht zum Strahlengang statt in der „Brennebene" (der dadurch bewirkte Nachteil, daß die „Bilder" z. T. unscharf werden, wird durch Variation der sorgfältig geeichten Felder kompensiert); schließlich äußerst kompendiöser Zusammenbau des ganzen Apparates zur Verkürzung des Strahlenganges.

Was die mit diesem Apparat bisher durchgeführte Arbeit betrifft, handelte es sich zuerst um Eichmessungen mit bekannten α-Strahlungsquellen, die leicht in genügender Stärke hergestellt werden können, um die Messung mit großer Genauigkeit (1 Proz.) durch Hin- und Herschieben des Beobachtungsmikroskopes ausführen zu können. Die Resultate mit diesen Quellen (*RaEm*, *RaA*, *RaC*, *Po*) brachten natürlich nichts Neues, wenn auch die Art der e/m-Bestimmung neu war. Dagegen brachte ein Versuch mit natürlichen H-Strahlen aus Paraffin eine weit präzisere Bestätigung dieser Teilchen als Protonen, als durch eine ältere Arbeit Rutherfords vorlag. Die durch Auszählen gewonnene Kurve zeigt Fig. 1.

Später habe ich auch mit schwachen α-Quellen Kurven aufgenommen, um Bildbreite, Kurvenform usw. genau kennen zu lernen. Dabei (Fig. 2) ergab sich neben den gewöhnlichen α-Teilchen (α^{++}) sehr schön das Auftreten von einfach geladenen *He*-Atomen (α^{+}), wie sie bekanntlich zuerst von Rutherford entdeckt und untersucht worden sind. Das Intensitätsverhältnis, das sich bei den beständigen Umladungen herstellt, ändert sich mit abnehmender Reichweite zugunsten kleinerer Ladung und ergab sich dementsprechend auch bei meinen Versuchen als von der verwendeten Strahlungsquelle und Absorption abhängig. Bei dem hier wiedergegebenen Versuch ist für die α^{+}-Strahlen die Vereinigung auf dem Schirm (Fokussierung) unvollständig, da ja — durch die Wahl der

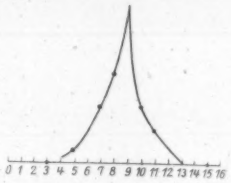


Fig. 1.

Feldstärken — auf die α^{++}-Strahlen, „scharf eingestellt" war; trotzdem ist, wie man sieht, das betreffende Maximum recht deutlich und auch ganz an der erwarteten Stelle. Neutrale Teilchen, die ja die Felder unabgelenkt durchfliegen müssen, können bei meiner Anordnung (wegen der Blende) nicht zur Beobachtung gelangen, wenn man nicht besonders darauf ausgeht.

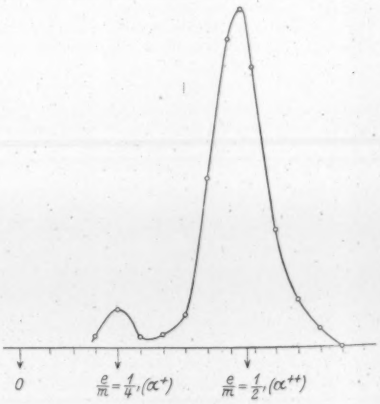


Fig. 2.

Auch bei Versuchen an Atomtrümmern wird man sich zunächst darüber klar werden müssen, nach was für Teilchen (in bezug auf e/m und v) man eben suchen will. Leichte Atomtrümmer, deren e bzw. m nur wenige Einheiten beträgt, müssen bei Verteilung über einen genügend großen Geschwindigkeitsbereich alle gleichzeitig (wenn auch nicht gleichzeitig „scharf") auf dem Schirm zur Beobachtung kommen. Dann sind noch nach anderen Versuchen (Wilson auf-

nahmen) schwere Teilchen zu erwarten, nämlich die Restkerne (vielleicht mitsamt dem eingedrungenen α-Teilchen), die nach unseren jetzigen Kenntnissen die Elektronenhülle im großen und ganzen behalten dürften, also etwa als einfach oder doppelt geladene Ionen auftreten könnten. Nach diesen wurde bisher nicht gesucht, hauptsächlich deshalb, weil man gar nicht weiß, ob sie überhaupt Szintillationen erregen und diesbezügliche Vorversuche erst gemacht werden müssen. Im übrigen gelangen diese Restkerne bei den Messungen an leichten Atomtrümmern gar nicht auf den Schirm.

Zu einer erfolgreichen e/m Bestimmung mit dem Massenspektroskop gehört außerdem eine ungefähre Kenntnis der Geschwindigkeit v. Nun liegen für eine große Zahl von Elementen orientierende Zertrümmerungsversuche, insbesondere von Kirsch und Petterson und deren Mitarbeitern, vor, deren Resultate: Ausbeutezahlen und Reichweiten, mir zur Verfügung standen. Wenn man auch Gründe hat, die hierbei auftretenden Sekundärstrahlen in der Hauptsache als H-Partikeln und reflektierte α-Strahlen anzusehen, so kann man natürlich doch aus der Reichweite keinen sicheren Schluß auf die Geschwindigkeit ziehen, selbst wenn man die Geigersche Beziehung als gültig hinnimmt, was für kleine Reichweiten sicher nur eine grobe Annäherung bedeutet. Andrerseits können eben Geschwindigkeitsmessungen erst gemacht werden, wenn einmal e/m mit Sicherheit bekannt ist. An natürlichen H-Strahlen und Atomtrümmern aus Al, für die diese Frage heute erledigt ist, die Beziehung zwischen Reichweite (Szintillation!) und Geschwindigkeit festzustellen, ist eine der nächsten Aufgaben, die bei uns in Wien gelöst werden sollen. Für die massenspektroskopische Untersuchung muß man also, von einem vermuteten Wert von v ausgehend, die Feldstärken nach unten und oben variieren, bis man eine zur Zählung genügende Intensität auf den Schirm bekommt. Diese Notwendigkeit des Probierens bedeutet keinen grundsätzlichen Mangel der Methode, liegt doch bei anderen spektroskopischen Methoden (z. B. der Röntgenspektroskopie) die Sache ganz ähnlich; die Versuche werden dadurch bloß etwas langwierig. Dies ist auch ein Hauptgrund, warum die Messungen an Atomtrümmern aus C und Fe noch nicht abgeschlossen werden konnten; hier sollen nur die Resultate mit Al, die als endgültige anzusehen sind, besprochen werden[1]). (Über dieses Element lagen besonders eingehende Zertrümmerungsversuche von E. A. W. Schmidt vor.) Es wurden verschiedene Anordnungen von Quelle und Substanz versucht, z. B. mit Al-folie ausgekleidetes Emanationsröhrchen, mit RaC aktivierter Al-draht usw. Am günstigsten in punkto Ausbeute, Verseuchungsfreiheit und

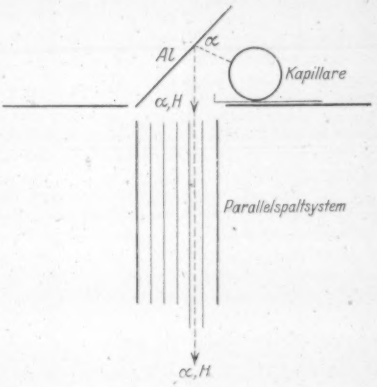


Fig. 3.

Freiheit von direkter Strahlung (weitreichende α und natürliche H) erwies sich schließlich der in Fig. 3 skizzierte Aufbau.

Seitlich über dem Spalt liegt auf einem Al-bord die hoch-α-durchlässige, emanationsgefüllte Kapillare; über dem Spalt, unter etwa 45° Neigung ein Streifen aus Al-blech. Es ist dafür gesorgt, daß nur Strahlen vom Al (Atomtrümmer und reflektierte α) nach unten in das Spaltsystem gelangen können. Das so aufgenommene Massenspektrum zeigt Fig. 4.

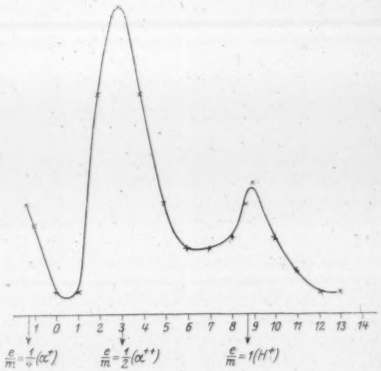


Fig. 4.

[1]) Näheres siehe Mitteilungen d. Inst. f. Radiumforschung, Nr. 181.

Die Ausbeute ist nun bei Atomtrümmern ganz allgemein noch wesentlich kleiner als bei natürlichen H-Strahlen aus Paraffin, wenn auch glücklicherweise bei weitem nicht so klein, wie sie ursprünglich von Rutherford und Chadwick angegeben war. (Schon während des Baues meines Apparates hatten ja Kirsch und Pettersson Versuche gemacht, die mich über diesen Punkt beruhigten.) Die Fehlergrenze muß somit etwas höher, etwa mit 5 Proz., angesetzt werden. In der Kurve sieht man deutlich neben dem großen Maximum der reflektierten α-Strahlen ($e/m = {}^1/_2$) ein zweites, scharfes Maximum bei $e/m = 1$ (Einheiten sind das Elementarquantum und das Atomgewicht des Wasserstoffs): damit sind

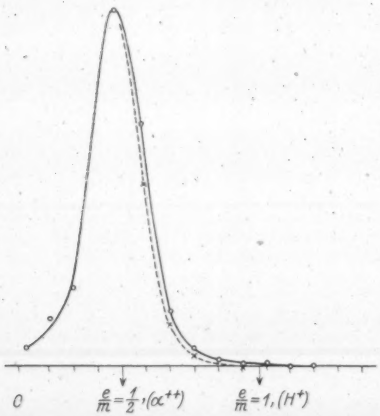


Fig. 5.

H-Strahlen als Atomtrümmer aus Al erwiesen. Die Übereinstimmung auf etwa 2 Proz. erscheint befriedigend, ebenso die Übereinstimmung der Ausbeute mit der von Schmidt angegebenen Zahl, nämlich 30 pro Million α-Teilchen pro cm Luftäquivalent. Der Wiederanstieg der Kurve nach links ist den α^{+}-Teilchen, die hier ziemlich zahlreich sein müssen, zuzuschreiben. Es war wünschenswert, das obige Resultat durch einen Leerversuch zu ergänzen: wenn auch die Tatsache des H-Maximums an sich kaum bestritten werden kann, so wäre es doch möglich, daß ein beträchtlicher Teil seines Ordinatenwertes gestreuter α-Intensität zuzuschreiben wäre. Daß dies nicht der Fall ist, zeigt die Kurve (Fig. 5), die einen Versuch mit reiner α-Strahlung unter gleichen Verhältnissen (H-Einstellung, α unscharf) wiedergibt. Die α-Intensität ist an der H-Stelle längst auf Null abgesunken.

Die vorläufigen Versuche mit C und Fe deuten ebenfalls auf H-Charakter der aus diesen Elementen abgespaltenen Atomtrümmer.

Zum Schlusse noch ein Wort der Entschuldigung: wenn diese Messungen für unsere Erwartung viel zu langsam fortschreiten, so hat das seinen Grund darin, daß für einen gelungenen Versuch immer zahlreiche technische Bedingungen erfüllt sein müssen: hohe Präparatstärke, absolute Verseuchungsfreiheit, tadelloses Vakuum usw. Das schwerste Hindernis für rasche Arbeit aber ist wohl die Szintillationsmethode, die als letzte Bedingung das Vorhandensein nicht nur empfindlicher, sondern auch gut ausgeruhter, gut disponierter Zähler (Beobachter) voraussetzt. Deshalb ist auch in Wien unser aller Bestreben darauf gerichtet, andere Beobachtungsmethoden für unsere Zwecke auszubilden. In diesem Zusammenhange möchte ich mitteilen, daß es kürzlich Ortner und mir in Wien gelungen ist, einzelne H-Strahlen nur vermittels der Primärionisation im Lautsprecher hörbar zu machen. Diese und andere methodische Fortschritte ermutigen mich, die Hoffnung auszusprechen, daß wir dann rascher einen Überblick über die vielen Fragen bekommen werden, die heute grundsätzlich schon lösbar sind.

W. Busse (München), Über die Ionisation bei der langsamen Oxydation von Phosphor.

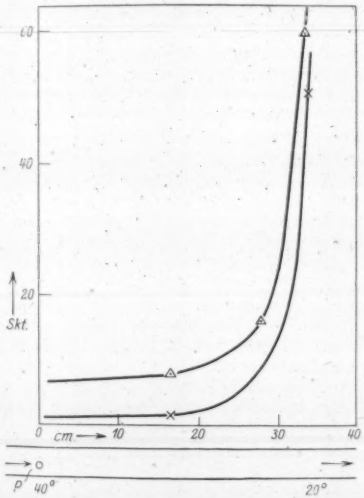
Die in Luft von Zimmertemperatur erfolgende langsame Oxydation des weißen Phosphors ist außer mit Leuchten und Ozonbildung auch mit Ionenbildung im umgebenden Gase verbunden. Die Oxydation erfolgt vorwiegend in zwei Stufen, Bildung von Phosphortrioxyd und Phosphorpentoxyd. Die Ozonbildung geht nach van t' Hoff der Trioxydbildung parallel:

$$P_2 + 2\,O_2 = P_2O_3 + O,\quad O + O_2 = O_3.$$

Harms zeigte, daß die zur Oxydation verbrauchte Sauerstoffmenge bedeutend größer ist als die erzeugte Ionenmenge. Auf etwa 10^6 Sauerstoffmoleküle kommt nur 1 Ion. Da die erzeugte Ozonmenge von der Größenordnung des Sauerstoffs ist, ist damit wie auch Gockel gezeigt hat, das Ozon als Träger der Leitfähigkeit ausgeschlossen. Ebenso konnte auch lichtelektrischer Effekt von Seite der leuchtenden P-Oberfläche in keiner Weise festgestellt werden. Im folgenden wird an Hand weiterer experimenteller Resultate der Nachweis geführt, daß die Leitfähigkeit durch die Dissoziation einer

im Oxydationsprozeß entstehenden Säure hervorgerufen wird[1]).

Zunächst läßt sich auf verhältnismäßig einfache Weise zeigen, daß der ionisierende Vorgang in der Dissoziation irgendeines der bei der Oxydation entstehenden Produkte besteht. Befindet sich ein Stück Phosphor in einem von Luft durchströmten Messingrohr, in dem die Temperatur mit der Entfernung vom P schnell abnimmt, wie aus der Figur deutlich wird, — die



Temperatur der Luft beträgt am Orte des P annähernd 40° C, im Abstande von 20 cm ist sie auf 22° gesunken und beträgt in der Entfernung von 35 cm noch 20° — so nehmen die im Luftstrom vorhandenen Ionenkonzentrationen in der in der Figur dargestellten Weise zu. Im Temperaturgebiet von 22—20° findet ein plötzlicher Anstieg der erzeugten Mengen statt, der die in Nähe von P vorhandene Ionisierung um ein Vielfaches übertrifft. Lichtelektrischer Effekt von seiten der P-Oberfläche erscheint demnach ausgeschlossen; längs des Rohres ist ebenfalls kein sichtbares Leuchten wahrzunehmen. Es ist auch unwahrscheinlich, daß irgendeine unsichtbare Strahlung im Rohre auftritt. Demnach nehmen wir an, wie sich weiter bestätigt, daß Dissoziation vorliegt. Dafür sprechen auch die Beobachtungen von Guggenheimer, Schenck und Breuning, welche fanden, daß ohne Anwesenheit von Wasserdampf keine Ionisation erfolgt. Besondere Schlüsse ließen sich daraus allerdings nicht ziehen, da die Oxydation durch den Wasserdampf in heute noch nicht durchsichtiger, entscheidender Weise beeinflußt wird und die Ionisation der Oxydation parallel geht.

Die Abnahme der Beweglichkeit der Ionen mit wachsendem Alter ist zunächst von Harms näher verfolgt worden. Die anfänglich fast molekularer Größe entsprechende Beweglichkeit nimmt sehr schnell ab und erreicht nach einigen Sekunden Werte von 10^{-3} bis 10^{-4} cm/sec pro Volt/cm, entsprechend Ionenradien von 10^{-6} bis 10^{-5} cm, deren Größe in hohem Maße abhängt von der leicht variablen Konzentration der anlagerungsfähigen neutralen Phosphoroxyde, dem Feuchtigkeitsgehalt und dem Einfluß geringer Temperaturdifferenzen. Wichtig ist aber, daß die so beobachteten, jeweils vorhandenen größten Ionen nur einen kleinen Teil der Gesamtzahl ausmachen. Es ist nämlich durchaus keine einheitliche Ionengröße vorhanden, sondern es liegt ein weiter Bereich von Größen vor; es läßt sich ein „kontinuierliches Spektrum" der Beweglichkeiten experimentell ermitteln[1]). Die den kleinsten vorhandenen Ionen entsprechende Grenze zeigt sogar auffallend große Beweglichkeiten mit Ionenradien von 10^{-8} bis 10^{-7} cm an. Dabei fällt es auf, daß unter besonderen Umständen die Beweglichkeiten der negativen Ionen bedeutend größer ausfallen als die gleichzeitig vorhandenen größten Beweglichkeiten der positiven Ionen; so beträgt z. B. die Beweglichkeit des negativen Ions 8 cm/sec pro Volt/cm, die des positiven Ions 1 cm/sec pro Volt/cm. Zur Erklärung dieses Unterschiedes bleibt nur die Annahme übrig, daß die negativen Ionen höher geladen seien als die positiven. Man findet, wie weiter unten noch deutlicher wird, daß die positiven Ionen vielfach einfach geladen sind[2]), während das negative Ion vier- auch sechsfache Elementarladung trägt. Dadurch ist wiederum gezeigt, daß Dissoziation eines Produktes der Oxydation vorliegt; denn im Falle lichtelektrischen Effekts könnten höchstens die positiven Ionen mehrfach geladen auftreten. Das negative Ion dagegen wäre einfach geladen zu erwarten. Eine nachträgliche Zusammenlagerung kommt wegen der Kleinheit der Teil-

1) Im vorliegenden Bericht sind die exp. Ergebnisse auszugsweise enthalten. Eine ausführliche Darstellung erfolgt demnächst in den Ann. d. Phys.

1) Vgl. W. Busse, Ann. d. Phys. 81, 262, 1926.

2) Aus der unten erörterten Wahl der für die Dissoziation in Frage kommenden Säure geht deutlich hervor, daß in vielen Fällen einfache Ladung vorliegt, weil danach die maximale Ionenladung 8 Elementarquanten nicht überschreiten kann.

chen mit Radium von 10^{-7} cm nicht in Frage, da die zu dem Zweck erforderlichen Radien mindestens $4 \cdot 10^{-6}$ betragen müßten, damit ein doppelt geladenes Ion entstände. Im obigen Fall der kleinsten Größen handelt es sich offenbar, wie aus der an großen Ionen verfolgbaren Wachstumsgeschwindigkeit hervorgeht, um solche, die erst unmittelbar vor der Messung, teilweise erst direkt im Felde des Kondensators entstanden sind, deren Alter also bedeutend weniger als eine Sek. beträgt, wodurch der obige Befund, daß die Ionen großenteils erst allmählich im Luftstrom entstehen, sich gut bestätigt.

Das gleichzeitige Vorhandensein verschiedenfach geladener Ionen ermöglicht außerdem, den Einfluß der Ionenladung auf die angelagerte Masse quantitativ zu untersuchen. Die angelagerte Masse nimmt direkt proportional mit der Ladung des Ions zu, wie folgende Tabelle bestätigt:

Elementarquanten	$R \cdot 10^8$ cm	Verhältnis der Massen
4	2,85	$\frac{22,4}{5,9} = 4\ (\pm 5$ Proz.)
1	1,76	
2	3,4	$\frac{39,2}{19,6} = 2$
1	2,7	
4	5,0	$\frac{125}{64} = 2$
2	4,0	

Geringe Abweichungen rühren her von der geringen Unsicherheit hinsichtlich Festlegung der zugehörigen Entladespannung. Beachtenswerterweise bewährt sich die Berechnung der Masse prop. dem Kubus des Radius gut. Übrigens kommt obigem Ergebnis für das Verhalten der Ionen allgemeine Gültigkeit zu. Dem Umstande, daß im vorliegenden Falle der Phosphorionen geradezu ideale Verhältnisse zur Ermittlung eines solchen Zusammenhangs vorliegen, falls es gelingt, den Fall verschieden geladener, gleichzeitig vorhandener Ionen zu verwirklichen, ist es zu verdanken, daß obige Beziehung so quantitativ genau hervortritt.

Weitere Aufklärung über das Auftreten mehrfacher Ladung verschafft die Untersuchung der Temperaturabhängigkeit der erzeugten Ionenmengen. Sie läßt deutlich verfolgen, wie mit steigender Temperatur die Dissoziation wachsend mehrstufig erfolgt; die negativen Ionen sind vorwiegend vier- und sechsfach, maximal achtfach geladen; die positiven Ionen werden mit maximal vierfacher Ladung nachgewiesen, doch scheint höhere Ladung nicht ausgeschlossen. Bemerkt sei noch, daß bei einer gewissen Temperatur, die von der anfänglichen Temperatur, bei der der Phosphor dem Luftstrom ausgesetzt wird, abhängig ist, ein Maximum der Dissoziation sich ausbildet, so daß bei weiter steigender Temperatur die mehrstufige Dissoziation allmählich verschwindet.

Aus der Temperaturverteilung geht hervor, daß das fragliche Produkt maximal achtbasisch zu dissoziieren vermag. Es liegt hier also der interessante Fall vor, daß wir imstande sind, Rückschlüsse zu ziehen auf die Zahl der Elementarquanten eines Ions, ohne daß die sonst erforderliche Ermittlung der Größe des Partikels durch Bestimmung seiner Fallgeschwindigkeit im elektrischen Felde erforderlich wäre. Außerdem bildet die hier betrachtete Ionisation den ersten einwandfrei beobachteten, allgemeineren Fall primär, d. h. ohne nachträgliche Zusammenlagerung entstandener, mehrfach geladener Ionen in Gasen.

Wie bemerkt, findet ohne Anwesenheit von Wasserdampf keine Ionenbildung statt, ganz im Einklang mit vorliegendem Ergebnis, daß der ionisierende Prozeß in der Dissoziation einer durch die Oxydation entstehenden Säure besteht, die maximal dissoziierende, acht Wasserstoffatome enthalten muß. Von den bekannten, aus dem Verhalten der Säuren in Lösungen abgeleiteten Formeln entspricht keine dieser Forderung. In Betracht kämen folgende Säuren: Die Pyrophosphorige Säure ($H_4P_2O_5$), die Unterphosphorsäure (H_2PO_3) und die Pyrophosphorsäure ($H_4P_2O_7$). Die erstere Säure, die sich aus Phosphortrioxyd unter Addition von Wassermolekülen ($P_4O_6 + 4H_2O = 2H_4P_2O_5$) ableitet, scheidet aus, weil alle Beobachtungen dafür sprechen, daß P_4O_6 ohne Anwesenheit von Sauerstoff, d. h. ohne vorherige Bildung höherer Oxyde nicht ionisiert. Die Unterphosphorsäure ist zwar von Salzer bei der langsamen Oxydation nachgewiesen, aber ihr kommt mehr eine Ausnahmestellung zu, da sie aus dem Phosphortetroxyd sich nicht ableitet und ihre Molekularformel in Lösung äußerst niedrig ausfällt (H_2PO_3), es daher sehr fraglich erscheint, ob sie als höheres Polymeres existenzfähig ist. Dagegen sprechen alle Beobachtungen dafür, daß die Pyrophosphorsäure in Ionen zerfällt, deren Molekularformel im vorliegenden Falle $P_4O_{10} + 4H_2O = H_8P_4O_{14}$ lautet. Demnach ist Ionisation in Übereinstimmung mit dem Experiment erst zu erwarten, wenn Phosphorpentoxyd gebildet wird und dieses unter Wasseranlagerung die Meta-, Pyro- und Orthophosphorsäure bildet, von denen die mittlere unter für die Dissoziation günstigen Bedingungen zerfällt, und deren Vorhandensein im Oxydationsprozeß damit gleichzeitig nachgewiesen ist.

Diskussion.

Herr Krüger: Ich möchte fragen, welches die Ursache der Ionisation ist, ob vielleicht mehr die Hydratation oder die Oxydation?

Herr Busse: Als primäre Ursache ist die Oxydation zu P_4O_{10} anzusehen; die Bildung der Pyrophosphorsäure veranlaßt dann die Dissoziation, welche von der Hydratation in bedeutendem Maße begünstigt, vielleicht überhaupt erst ermöglicht wird.

Herr Lange: Die Bildung mehrfach geladener Ionen von $(P_4O_{14})^{4-}$, wie sie von dem Herrn Vortragenden angenommen wird oder gar die Zusammenlagerung mehrerer einfacher H^+ etwa zu $(H_4)^{4+}$ dürfte wohl etwas unwahrscheinlich sein, da man sich schwer vorstellen kann, woher die dazu erforderlichen beträchtlichen Energiemengen herkommen sollen.

Herr Busse: Die Bildung der mehrfach geladenen Ionen erscheint in Betracht der erheblichen Größe der Ionen, die unter dem Einfluß der Wasseranlagerung erfolgt, wohl denkbar. Ob die energetischen Bedingungen zur Dissoziation im vorliegenden Falle dieselben sind wie in Lösungen, scheint mir fraglich.

Nachtrag bei der Korrektur.

Zu Herrn Langes Bemerkung möchte ich vorbehaltlich einer späteren näheren Äußerung noch folgendes hinzufügen. Bei der langsamen Oxydation des Phosphors wird bekanntlich eine außerordentlich große Energiemenge frei; nach einer Zusammenstellung bei Petricaln[1]) sind die Bildungsenergien folgende:

$$2[P] + \tfrac{5}{2}[O_2] = P_2O_5 + 369{,}9 \text{ k cal}$$
$$2[P] + \tfrac{3}{2}[O_2] = P_2O_3 + 74{,}8 \quad \text{„}$$
$$P_2O_3 + O_2 \quad = P_2O_5 + 295{,}1 \text{ k cal}.$$

Mit dem letzteren Oxydationsprozeß, der Bildung des Pentoxyds aus dem Trioxyd, ist aber die Ionenbildung eng gekoppelt. Nach Petricaln berechnet sich die Bildungsenergie für eine Molekel als äquivalent einer Wellenlänge von 965 Å.-E., die zur Ionisierung der Luft annähernd ausreichen würde. Nach obigem aber kommt lichtelektrischer Effekt eben nicht in Frage. Es ist also derart kurzwellige Strahlung aus dem Ultra-Schumann-Gebiet nicht vorhanden, da auch durch Flußspat kein lichtelektrischer Effekt, wie zu erwarten, ausgeübt wird. Es scheint daher durchaus begreiflich, daß die zur Erzeugung der mehrfach geladenen Ionen erforderliche Dissoziationsarbeit durch die Oxydation geleistet werden kann, zumal da zu beachten ist, daß erst etwa auf jeden millionten molekularen Prozeß, wie oben berichtet, ein gebildetes Ion kommt. — Bei der langsamen Schwefeloxydation, die sich ohne Ionenbildung vollzieht, beträgt die Bildungswärme nur etwa 70 k cal.

1) Zeitschr. f. Physik **22**. 124, 1924.

Ernst Reichenbächer (Wilhelmshaven), Der Elektromagnetismus in der Weltgeometrie.

Es ist einer der bestechendsten Vorzüge der speziellen Relativitätstheorie Einsteins gewesen, daß es ihr gelang, den Maxwellschen elektromagnetischen Gleichungen eine einfache Gestalt zu geben. Besonders tritt das in der Geometrie der vierdimensionalen Raumzeitwelt hervor, die Minkowski auf dem Boden der speziellen Relativitätstheorie errichtet hat; denn in dieser Mannigfaltigkeit erfuhren die elektromagnetischen Größen eine einfache Deutung als Vierer- und Sechservektoren, d. h. Tensoren 1. und 2. Ranges. Bekanntlich lag die Sache nicht so günstig für die Deutung der Gravitation, der anderen Grundlage der physikalischen Erscheinungen. Sie wollte sich nicht in den Rahmen der Minkowski-Welt einfügen lassen, und diese Tatsache gab den Anlaß, diese Welt durch eine verallgemeinerte vierdimensionale Mannigfaltigkeit zu ersetzen, und Einstein baute seine spezielle Relativitätstheorie zur allgemeinen aus. In dieser beliebigen Raumzeitwelt erfuhr nun die Gravitation ihre vollständige Erklärung durch die Krümmungsverhältnisse der Mannigfaltigkeit, so daß damit zum ersten Male physikalische Größen restlos auf mathematische zurückgeführt waren. Damit hatte die Gravitation den Vorsprung, den der Elektromagnetismus bisher in der Minkowski-Welt vor ihr besessen hatte, nicht nur eingeholt, sondern erheblich überholt. Verglichen mit der Erklärung der Gravitation aus der Krümmung der vierdimensionalen Welt mußte die Deutung der elektromagnetischen Größen als Tensoren in dieser als etwas Unvollkommenes erscheinen, weil damit ihre mathematische Natur nicht geklärt war. Sie stellten Fremdkörper in dem mathematischen Weltgebäude dar, das für sie gewissermaßen nur eine Mietwohnung war, während es für die Gravitation ein Eigenheim bedeutete.

Es war also das Ziel, eine ähnliche organische Verbindung des Elektromagnetismus mit der Weltgeometrie zu schaffen, wie sie schon für die Gravitation bestand. Doch da erhob sich die eigentümliche Schwierigkeit, daß diese

letztere Verbindung, also die der Gravitation mit der Weltgeometrie, eine so innige war, daß sie eigentlich keinen Raum mehr ließ für etwas Neues wie den Elektromagnetismus. Weil die Gravitation die Riemannschen Krümmungen vollständig mit Beschlag belegte, war man gezwungen, auf mathematischem Gebiete etwas Neues, über Riemann Hinausgehendes zu schaffen, das als Erklärung des Elektromagnetismus dienen mußte. Das hat natürlich etwas Mißliches und schmeckt nach Hypothese ad hoc; aber bei der Lage der Dinge war es einfach nicht zu umgehen, wenn man nicht auf eine Zurückführung des Wesens des Elektromagnetismus auf die Weltgeometrie überhaupt verzichten wollte.

Verhältnismäßig am einfachsten war die Neuschöpfung in der Hinzufügung einer fünften Ausdehnung zu den vier bekannten der Raumzeitwelt, wie sie in einer Theorie von Kaluza (1) vorliegt, die neuerdings von Klein (2) fortgeführt worden ist. Diese Theorie läuft im wesentlichen darauf hinaus, die 15 Komponenten des fünfdimensionalen Fundamentaltensors auf die 10 Komponenten eines vierdimensionalen als Gravitationspotentiale, vier gemischte Komponenten, die die neueingeführte fünfte Ausdehnung einfach enthalten und als elektrische Potentiale gedeutet werden, und eine konstante Komponente zurückzuführen, die die fünfte Ausdehnung zweifach enthält. Aber diese Zurückführung ist nur durch eine Zerlegung des Linienelementquadrates in zwei quadratische Differentialformen möglich, von denen die erste nur dann das Quadrat eines vollständigen Differentials darstellt, wenn die elektromagnetischen Erscheinungen verschwinden. Deshalb wird, abgesehen von diesem uns nicht interessierenden Fall, die oben erwähnte vierdimensionale Mannigfaltigkeit, die doch das mathematische Abbild der Welt darstellen soll, keine in der fünffach ausgedehnten enthaltene Untermannigfaltigkeit sein, und ihre Krümmungsverhältnisse haben mit jener nichts zu tun. Das kann ja auch nicht anders sein; denn diese haben eben neben der Gravitation für den Elektromagnetismus keinen Raum. Der Zusammenhang, der zwischen der Krümmung der vierdimensionalen Welt und der Gravitation ein organischer war, wird zu einem rein formalen. Deswegen und wegen der unbeantworteten Frage nach der physikalischen Bedeutung der fünften Dimension kann diese Theorie nicht recht befriedigen.

Bleibt man bei der Zahl vier der durch die Natur gegebenen Ausdehnungen der Welt, so muß man, wie gesagt, über die bisherige Riemannsche Mathematik hinausgehen, damit in der Raumzeitmannigfaltigkeit auch der Elektromagnetismus erklärt werden kann. Diese Grenzüberschreitung ist, wenn man von einem Versuch absieht, den ich vor 10 Jahren unternommen hatte (3), die elektromagnetischen Erscheinungen durch eine der Größe des Sechservektors proportionale Verdrehung der Raumzeitelemente, also gewissermaßen elementar-geometrisch, zu erklären, hauptsächlich in zwei Richtungen geschehen. Die Theorien der einen Richtung fügen zu dem an sich symmetrischen Fundamentaltensor der Raumzeitmannigfaltigkeit einen antisymmetrischen, dem sie die Deutung des elektromagnetischen Sechservektors geben. Hierhin gehören im wesentlichen eine Arbeit von Einstein (4) und auch ein weiterer Versuch von mir, den Elektromagnetismus zu erklären (5). Beide Theorien führen, wenn auch die Einsteinsche mit gewissen Einschränkungen, zu den bekannten Feldgleichungen der Gravitation und des Elektromagnetismus, leiden aber an dem Nachteil, daß die natürlich gegebene Symmetrie des Fundamentaltensors aufgegeben wird. Das wird bei Einstein noch dadurch verstärkt, daß er auch in den von Levi-Civita eingeführten Komponenten der Parallelverschiebung die natürliche Symmetrie opfert, was zu einer in sich zusammenhanglosen Mannigfaltigkeit führen muß (vgl. auch [5] und [6]). Aber auch im Fundamentaltensor hätte ein antisymmetrisches Glied nur dann Sinn, wenn man neben dem Linienelement noch etwa die Flächendifferentiale zur Charakterisierung einer Mannigfaltigkeit heranzieht, da diese ihr Vorzeichen wechseln, wenn die Reihenfolge der Komponenten geändert wird. Demgemäß habe ich in meiner Arbeit auch einen räumlichen Schraubungssinn einführen müssen, um zu den Maxwellschen Gleichungen zu gelangen. Gegen die formale Zulässigkeit dieser Ansätze ist an sich nichts zu sagen; aber es möchte mir doch jetzt scheinen, als ob diese Erklärungen des Elektromagnetismus ebenso wie die von Kaluza und Klein eben nur rein formale und keine organischen sind.

Aussichtsreicher erscheint mir der zweite Weg zur Erklärung des Wesens der Elektrizität, der durch Weyl eröffnet wurde (7). In seinen Arbeiten wurden die Grundlagen der Metrik einer scharfen Kritik unterzogen, und es wurde gezeigt, daß diese relativ zu einem Maßstab geschieht, dessen Eichung nicht allgemein für alle Raumzeitpunkte gleichmäßig gültig vorausgesetzt zu werden braucht, sondern von Punkt zu Punkt beliebig abgeändert werden kann. Es wird sich so die Maßzahl einer Strecke, die man von einem Punkt zu einem andern kongruent verschiebt, ändern, und diese Änderung geht völlig beliebig vor sich, da

ja eben die Eichung ganz beliebig ist. Natürlich würde die einmal für eine Strecke festgesetzte Eichung auch für andere gültig sein; es würden sich also die Maßzahlen der Strecken mit einer ganz willkürlichen, vom Orte abhängigen, aber für alle Strecken gleichen Eichfunktion multiplizieren, und Ähnliches gilt auch für alle physikalischen Größen, die sich je nach ihrem Eichgewicht mit einer Potenz dieser Eichfunktion vervielfachen, deren Exponent eben dies Eichgewicht ist. Ergibt sich für irgendeinen mathematischen Ausdruck, wie z. B. für das Maß der Riemannschen Krümmung, die Tatsache, daß ihre Änderung nicht proportional einer Potenz der Eichfunktion erfolgt, so wird diesem mathematischen Ausdruck eine physikalische Bedeutung abgesprochen, die ihm erst wieder zukommt, wenn er passend ergänzt oder umgebildet ist. Aber damit kann sich eine Theorie der Elektrizität nicht begnügen, weil mit der Eichrelativität nur eine skalare Ortsfunktion gewonnen ist, die für die elektrischen Größen keine Bedeutung haben kann. Weyl macht deshalb die Streckenübertragung außer von der Lage der Endpunkte auch noch vom Wege abhängig und gewinnt dadurch eine in sich geschlossene Theorie der Elektrizität. Dagegen ist von seinem Standpunkte natürlich nichts einzuwenden; aber es wird damit neben der Relativität des Maßstabes noch etwas wesentlich anderes eingeführt, und das ist unumgänglich nötig, wenn man eben die elektrischen Größen, die ja doch vektorieller Natur sind, erklären will, wie eben gesagt ist. In einer Verallgemeinerung, der die Weylsche Theorie durch Eddington (6) unterzogen wurde, ist diese Nichtintegrabilität der Streckenübertragung nicht ausdrücklich vorausgesetzt, sondern Eddington entkleidet die $g_{\mu\nu}$, die Komponenten des Maßtensors im Linienelement, ihres fundamentalen Charakters und ersetzt sie durch die Levi-Civitaschen Koeffizienten der Parallelverschiebung; er kommt dann zu seinen Ergebnissen durch allgemeine Schlüsse aus der Natur der auftretenden Tensoren und Pseudotensoren, von denen er möglichst wenig voraussetzt. Er gewinnt dann auf diesem noch allgemeineren Wege ähnlich wie Weyl den elektrischen Sechservektor als antisymmetrische Ergänzung zu dem eichinvariant gemachten Riemannschen Krümmungstensor 2. Ranges (vgl. auch (4) und (8)).

Selbstverständlich ist das Bestreben, die Erklärung der elektromagnetischen Erscheinungen durch eine möglichst tiefschürfende Grundlegung der geometrischen Begriffe zu gewinnen, bei Eddington wie bei Weyl durchaus anzuerkennen; aber es möchte mir fast scheinen, als ob des Guten dabei schon zu viel getan wäre. Ich kann weder einen zwingenden Grund für die Abhängigkeit der Streckenübertragung vom Wege wie auch für die Ersetzung der Einsteinschen Fundamentalgrößen durch die Levi-Civitaschen Koeffizienten, die nicht einmal mehr tensoriellen Charakter haben, erkennen. Eine Theorie der Elektrizität, die von diesen Ansprüchen an unser geistiges Umstellungsvermögen absähe und im großen und ganzen die in der Gravitationslehre bewährten Wege ginge, wäre mir lieber.

Freilich etwas Neues muß hinzukommen; die Riemannsche Geometrie liefert nur die Gravitation und nicht den Elektromagnetismus. Für die Art und Weise, wie dieses Neue eingeführt werden soll, scheint mir nun die Natur in dem Wirkungsgesetz für die Punktbewegung im Gravitations- und im elektromagnetischen Felde den wesentlichen Fingerzeig gegeben zu haben. Die Ableitung dieses Wirkungsgesetzes aus der Weylschen Theorie kann nicht befriedigen, weil es nur durch Annäherung, und auch nur als Integral-, nicht als Differentialgesetz gewonnen werden kann. Jedenfalls sticht diese Ableitung gegen das elegante Prinzip der geodätischen Linien der Einsteinschen Gravitationstheorie erheblich ab. Da scheint es mir der gewiesene Weg, gerade dieses Wirkungsgesetz zum Ausgangspunkt der Theorie zu machen, indem man zu dem Wirkungsdifferential der Gravitation, das gleich dem mit dem konstant anzunehmenden Massenfaktor multiplizierten Linienelement der Riemannschen Mannigfaltigkeit ist, das der Elektrizität hinzusetzt, das gleich dem mit einer zweiten Konstanten, dem Ladungsfaktor, multiplizierten linearen Differentialausdruck $\varphi_\varkappa dx^\varkappa$ ist.

Damit ist ein aus einem linearen und der Wurzel aus einem quadratischen Teil additiv zusammengesetzter Differentialausdruck gewonnen, dessen 14 Koeffizienten als Komponenten zweier Fundamentaltensoren angesehen werden können, die ungefähr gleichwertig in dieses für die Theorie grundlegende Wirkungsdifferential eingehen.

Will man nun die Theorie rein mathematisch begründen, so müßte man das Wirkungsdifferential durch den Massenfaktor dividieren und erhielte so den Ausdruck

$$\frac{e}{m}\varphi_\varkappa dx^\varkappa + \sqrt{g_{\mu\nu}\,dx^\mu\,dx^\nu},$$

den man als Linienelement einer Mannigfaltigkeit anzusetzen hätte. Das Neue gegenüber der Riemannschen Geometrie liegt darin, daß nicht ohne weiteres die Strecke AB gleich BA würde, sondern im allgemeinen bei Umlegung des Maßstabes sich ihre Länge ändert. Das

gilt aber, wie die Ausführung der hier entwickelten Gedanken in meinen beiden letzten Arbeiten ((9) und (10)) zeigt, nur für die zeitliche Richtung und würde so einen mathematischen Grund für die Nichtumkehrbarkeit des Zeitablaufes liefern.

Ich glaube, daß durch diesen komplexen Ansatz für das Linienelement auch die Bedenken beseitigt sind, die Herr Einstein in einer kürzlich erschienenen Arbeit (11) gegen „das Bestreben, die Elektrodynamik mit dem Gravitationsgesetz zu einer Einheit zu verschmelzen" geäußert hat, da mein Ansatz ja „der Zeit eine Richtung vorschreibt und damit Vor- und Nachkegel jedes Weltpunktes von vornherein unterscheidet". Wenn es nämlich möglich ist, durch eine Spiegelung die positive Hälfte der Zeitachse in die negative überzuführen, so kann es nach Einstein keine allgemein kovarianten Gleichungen geben, die Elementarteilchen verschiedenen Vorzeichens und gleichen Absolutwertes der Ladung, aber verschiedener Massen liefern, wie sie die Erfahrung bekanntlich im Proton und Elektron aufweist. Eine solche Spiegelung wird ja nun gerade durch den komplexen Ansatz des Linienelementes unmöglich gemacht, so daß die von Einstein aufgezeigte grundsätzliche Schwierigkeit vermieden wird. Ob nun die neue Theorie tatsächlich zu den von der Erfahrung geforderten Elementarkörpern führt, bedarf noch einer näheren Untersuchung.

Dabei möchte ich aber nicht unerwähnt lassen, daß ich das Vertrauen zu der Annahme der Protonen und Elektronen als der letzten Bausteine der Materie verloren habe, wenigstens wenn man sie als unveränderlich annimmt (vgl. (12) und (13)). Ich glaube, daß ein großer Teil der Schwierigkeiten, die sich der Einordnung der quantentheoretisch gegebenen Tatsachen in das vierdimensionale Weltbild entgegenstellen, behoben werden kann, wenn man die Elektronen und Protonen als veränderlich annimmt, wobei es nahe liegt, diese Veränderungen in ihrem inneren Zusammenbau aus noch elementareren Teilchen zu suchen. In dieser Annahme werde ich durch neuere Arbeiten von G. Mie bestärkt ((14) und (15)). Auch das Kreiselelektron der Herren Compton, Uhlenbeck und Goudsmit ((16) und (17)) scheint mir nicht geeignet, für ein derartiges komplexes Elektron einzutreten, weil ganz entschieden daran festgehalten werden muß, daß es unzulässig ist, von Teilen, also etwa von Volum- oder Oberflächenelementen der letzten Bausteine der Materie zu reden, also eine Rotation dieser Teilchen ohne Bedeutung ist (vgl. (18), (19) und (23)). Ob man allerdings diese Teilchen mit Reißner ((20) und (21), vgl. auch (23)), als ausdehnungslos ansehen soll, scheint mir zweifelhaft, um so mehr als seine Lösung für das Elektron durch eine einfache Transformation im Radius in die allgemein übliche übergeführt werden kann. Der Zweifel an der Richtigkeit der Hypothese des Kreiselelektrons wird durch eine ganz kürzlich erschienene Arbeit von Wentzel (22) verstärkt, der gezeigt hat, daß die Röntgendubletts anders herauskommen, als die Theorie des Kreiselelektrons es verlangt.

Sollten nun tatsächlich die bisher kleinsten Teilchen, das Elektron und das Proton, sich als zusammengesetzt aus noch kleineren erweisen, so hätten wir es doch in ihnen mit Systemen sehr hoher Stabilität zu tun, und die Tatsache, daß ihre Masse verschieden ausfällt, macht es nicht gerade unwahrscheinlich, daß auch die Masse der hypothetischen positiven und negativen Teilchen, aus denen sie zusammengesetzt sein sollen, verschieden ist. Dann würde die alte Schwierigkeit der Massenverschiedenheit weiter bestehen; aber da bietet ja vielleicht gerade das komplexe Linienelement eine mögliche Erklärung.

Literaturverzeichnis.

1) Th. Kaluza, Berliner Berichte 1921, S. 966.
2) O. Klein, Quantentheorie und fünfdimensionale Relativitätstheorie. Zeitschr. f. Phys. **37**, 895, 1926.
3) E. Reichenbächer, Grundzüge zu einer Theorie der Elektrizität und Gravitation. Ann. d. Phys. **52**, 134, 1917.
4) A. Einstein, Einheitliche Feldtheorie von Gravitation und Elektrizität. Berliner Berichte 1925, S. 414 bis 419.
5) E. Reichenbächer, Eine neue Erklärung des Elektromagnetismus. Zeitschr. f. Phys. **13**, 221, 1923.
6) A. S. Eddington, A Generalisation of Weyl's Theory usw. Proc. Roy. Soc. **99**, 104, 1921.
7) H. Weyl, Eine neue Erweiterung der Relativitätstheorie. Ann. d. Phys. **59**, 101, 1919.
8) A. Einstein, Zur allgemeinen Relativitätstheorie. Berliner Berichte 1923, S. 32 bis 38.
9) E. Reichenbächer, Die mechanischen Gleichungen im elektromagnetischen Felde. Zeitschr. f. Phys. **33**, 916, 1925.
10) E. Reichenbächer, Das komplexe Linienelement. Zeitschr. f. Phys. **38**, 329, 1926.
11) A. Einstein, Elektron und allgemeine Relativitätstheorie. Physica **5**, 330, 1925.
12) E. Reichenbächer, Welche weltgeometrischen Eigenschaften zeichnen die gequantelten Weltlinien der Elektronen im Wasserstoffatom aus? Zeitschr. f. Phys. **32**, 505, 1925.
13) E. Reichenbächer, Die Kreisbahnen im Wasserstoffatom bei mitbewegtem Kern. Zeitschr. f. Phys. **32**, 907, 1925.
14) G. Mie, Zur Theorie der Bremsstrahlung und der Comptonschen Streustrahlung. Physik. Zeitschr. **26**, 665, 1925.
15) G. Mie, Bremsstrahlung und Comptonsche Streustrahlung. Zeitschr. f. Phys. **33**, 39, 1925.
16) A. Compton, Journ. Frankl. Inst. **192**, 145, 1921.

17) G. E. Uhlenbeck und S. Goudsmit, Ersetzung der Hypothese vom unmechanischen Zwang durch eine Forderung bezüglich des inneren Verhaltens jedes einzelnen Elektrons. Die Naturwiss. **13**, 953, 1925.
18) H. Weyl, Was ist Materie? Die Naturwiss. **12**, 561, 1924.
19) E. Reichenbächer, Schwere und Trägheit. Physik. Zeitschr. **22**, 234, 1921.
20) H. Reißner, Über eine Möglichkeit, die wesentlichen Eigenschaften von Kern und Elektron usw. Physik. Zeitschr. **26**, 925, 1925.
21) H. Reißner, Beitrag zur Theorie des Elektrons. Zeitschr. f. Phys. **31**, 844, 1925.
22) G. Wentzel, Eine Schwierigkeit für die Theorie des Kreiselelektrons. Zeitschr. f. Phys. **37**, 911, 1926.
23) J. Frenkel, Zur Elektrodynamik punktförmiger Elektronen. Zeitschr. f. Phys. **32**, 518, 1925.

A. Becker (Heidelberg), Durchgang korpuskularer Strahlen durch Materie.

Die vergleichende Untersuchung des Verhaltens der Materie gegenüber den verschiedenen Korpuskularstrahlen stellt einen Weg dar, zur Kenntnis der allgemeinen Gesetze vorzudringen, welche die Vorgänge der Energieübertragung auf die Atome der Materie beherrschen.

1. Ein erster weitgehend durchgeführter Versuch dieser Art ist der vor kurzem unternommene Vergleich des Durchgangs der Kathodenstrahlung und der bewegten Atome der α-Strahlung durch Materie[1]). Neben gewissen offensichtlichen Analogien liegen hier auch Verschiedenheiten vor. Beim α-Strahl bleibt die Teilchenzahl auf langem Wege konstant, und es nimmt nur die Geschwindigkeit ab; die Abnahme der Energie erfolgt also durch Geschwindigkeitsverlust. Beim Kathodenstrahl dagegen beobachten wir in der Hauptsache eine Abnahme der zum Strahl gehörigen Teilchenzahl, was wir als Absorption bezeichnen. Wir wissen heute[2]), daß hier im wesentlichen eine Verschiedenheit der Korpuskelbahnen in beiden Fällen vorliegt, die wir ganz auf die verschiedene Größe der Masse zurückführen können. Die Kathodenstrahlabsorption ist überwiegend eine unechte; die aus dem Strahl infolge Reflexion an den Molekülen ausgeschiedenen Elektronen setzen überwiegend ihre Bahn in geänderter Richtung fort solange, bis ihre Energie — ebenso wie bei der α-Strahlung — durch Geschwindigkeitsverlust aufgezehrt ist.

Der Geschwindigkeitsverlust beider Strahlen erweist sich, soweit die bisherige Erfahrung erkennen läßt, im gleichen Gebiet der linearen Geschwindigkeit als gleiche Geschwindigkeitsfunktion. Wesentlich verschieden sind aber die Absolutwerte. Auf gleiche Bahnlänge bezogen ist

$$\left(\frac{dv}{dx}\right)_+ : \left(\frac{dv}{dx}\right)_- = 0{,}0014 = 1:714.$$

Als eines der Äquivalente des Geschwindigkeitsverlusts wird die Sekundärstrahlung bzw. Deltastrahlung beobachtbar, welche in Gasen in der Leitfähigkeitserzeugung in Erscheinung tritt und quantitativ verfolgbar ist. Der Vergleich der differentialen Trägerbildung in Luft zeigt, worauf zuerst Herr Ramsauer[1]) hingewiesen hat, in beiden Fällen den gleichen relativen Verlauf mit der Lineargeschwindigkeit. Verschieden ist aber auch hier der Absolutwert. Bezeichnen wir die auf der Wegeinheit von einem einzigen Strahlenteilchen erzeugte Anzahl von Trägerpaaren mit s_+ bzw. s_-, so findet sich im Mittel $s_+ : s_- = 8{,}9$.

Vergleichen wir den Energieverlust mit der Trägerbildung, so ergibt sich folgendes:

Bezeichnet P_+ bzw. P_- die Energie eines Strahlteilchens, so ist für den Fall gleicher Lineargeschwindigkeit

$$\frac{dP_+}{dx} : \frac{dP_-}{dx} = \frac{m_+}{m_-} \cdot \frac{\left(\frac{dv}{dx}\right)_+}{\left(\frac{dv}{dx}\right)_-} =$$

$$= 7300 \cdot 0{,}0014 = 10{,}2.$$

Das Verhältnis der Energieverluste ist sonach von sehr nahe gleicher Größe wie dasjenige der auf gleichen Wegen erzeugten Trägerzahl. Energieverlust und dabei erzeugte Trägerzahl bzw. emittierte Elektronenzahl sind also in guter Annäherung einander proportional.

Wir können nun auch diesen Proportionalitätsfaktor ermitteln. Derselbe hat die Bedeutung derjenigen Energie, welche ein Korpuskularstrahlteilchen durchschnittlich zur Erzeugung eines einzigen Trägerpaars in Luft benötigt. Bezeichnen wir ihn mit ΔP_+ bzw. ΔP_-, so ist

$$\Delta P_+ = \left|\frac{dP_+}{dx}\right| : s_+ = \frac{74{,}73 \times 10^{-9}}{v \cdot s_+},$$

$$\Delta P_- = \left|\frac{dP_-}{dx}\right| : s_- = \frac{7{,}31 \times 10^{-9}}{v \cdot s_-}.$$

Aus der Beobachtung folgt hiernach im Mittel, auf die Ladung eines Elementarquants bezogen, $\Delta P_+ = 32{,}9$ und $\Delta P_- = 29{,}2$ Volt/Trägerpaar, also nahe derselbe Wert.

Ein anderer Weg zur Ermittlung dieser Größen ist derjenige aus der beobachtbaren

1) A. Becker, Ann. d. Phys. **81**, 91, 1926.
2) Vgl. P. Lenard u. A. Becker, Band „Kathodenstrahlen" im Handb. d. Experimentalphysik von W. Wien u. F. Harms, P. Lenard, Ann. d. Phys. **80**, 17, 1926; H. Kulenkampff, Ann. d. Phys. **80**, 261, 1926; A. Becker, a. a. O. S. 105.

1) C. Ramsauer, Jahrb. d. Radioakt. **9**, 515, 1912.

totalen Trägererzeugung, über welche für beide Strahlen Angaben vorliegen[1]). Aus diesen ergibt sich

$AP_+ = 32{,}3$ und $AP_- = 36$ Volt/Trägerpaar,

welch letzterer Wert nahe zusammenfällt mit dem von Herrn Kulenkampff[2]) für mittlere Kathodenstrahlgeschwindigkeiten aus Untersuchungen an Röntgenstrahlen hergeleiteten $AP_- = 35 \pm 5$ Volt/Trägerpaar.

Wir gelangen damit von verschiedenen Seiten zu dem übereinstimmenden Nachweis eines hinsichtlich des Energieverbrauchs völlig einheitlichen Verhaltens der Materie gegenüber den beiden betrachteten Korpuskularstrahlen. Die durchschnittlich zur Erzeugung eines Trägerpaars verbrauchte Energie ist von der Natur des Korpuskularstrahls und von dessen Geschwindigkeit in dem dem Vergleich praktisch zugänglichen Bereich derselben mindestens in erster Näherung unabhängig und beträgt für Luft etwa 30 Volt. Da die zur Elektronenbefreiung aus den Atomen allein erforderliche Energie weit geringer ist als dieser Wert, so müssen auch die Energieleistungen andrer Art, die noch vorhanden sind, sich im gleichen Verhältnis in den Gesamtverbrauch teilen. Daß die an das befreite Elektron übertragene Energie in beiden Fällen übereinstimmt, folgt aus der unmittelbar festgestellten Gleichheit sowohl der Verteilung als der Absolutwerte der Austrittsgeschwindigkeiten bei festen leitenden Oberflächen[3]).

2. Der bisherige Vergleich erstreckt sich auf ein Geschwindigkeitsgebiet von rund $v = 0{,}03$ bis 0,07 (gemessen mit der Lichtgeschwindigkeit als Einheit). Da atomistische Strahlen größerer Geschwindigkeit nicht verfügbar sind, bleibt nur noch die Frage zu untersuchen, wie weit die oben nachgewiesene Gleichheit des Verhaltens beim Übergang zu kleinsten Geschwindigkeiten erhalten bleibt.

Von der Kathodenstrahlung wissen wir, daß ihre Fähigkeit zur Trägerbildung bei einer bestimmten Grenzgeschwindigkeit (für Luft $v = 0{,}0066$) verschwindet, weil dann ihre Energie (unter der sog. Trägerbildungsspannung, für Luft 11 Volt) nicht mehr zur Entfernung eines sekundären Elektrons aus dem Atomverband ausreicht. Das α-Strahlenteilchen besitzt bei dieser Lineargeschwindigkeit aber noch die relativ große Energie von $0{,}13 \times 10^{-6}$ Erg, die es befähigt, noch etwa $2{,}5 \cdot 10^3$ Trägerpaare in Luft zu erzeugen, und man wird annehmen müssen, daß der Verbrauch dieser Energie tatsächlich in dieser Weise erfolgt. Der direkte Nachweis dieses Verhaltens in Luft von Atmosphärendruck dürfte bisher nur dadurch verhindert worden sein, daß diese Energieabgabe hier auf sehr kurzer Wegstrecke erfolgt und daß die Strahlintensität infolge der Reichweiteschwankungen in diesem Geschwindigkeitsgebiet stark absinkt.

Für weiteres Eindringen in dieser Frage stehen uns atomistische Strahlen von beliebig kleiner Geschwindigkeit und ausreichender Intensität in den Kanalstrahlen, den Anodenstrahlen und den seitens glühender Körper emittierten positiven Strahlen zur Verfügung. Die bis jetzt zu unserer Frage vorliegenden Beobachtungen sind hier allerdings namentlich bezüglich der quantitativen Verhältnisse noch unzureichend. Sie zeigen aber, daß Trägerbildung seitens dieser Strahlen noch weit unterhalb der oben genannten Grenzgeschwindigkeit der sekundären Kathodenstrahlung verfolgbar ist, und es ist andrerseits von Herrn Baerwald[1]) besonders eingehend an den in Wasserstoff verlaufenden Wasserstoff-Kanalstrahlen im Geschwindigkeitsbereich $v = 0{,}0033$ bis 0,0083 nachgewiesen worden, daß deren differentiale Trägerbildung sich sehr befriedigend derjenigen der α-Strahlung anschließt, so daß ein prinzipieller Unterschied im Verhalten der verschiedenen atomistischen Strahlen nicht anzunehmen ist. Es zeigt sich ferner, daß auch der Ladungszustand der Teilchen für deren Energieabgabe jedenfalls von untergeordneter Bedeutung ist[2]; sehr wahrscheinlich besteht aber ein gewisser Einfluß desselben auf die Häufigkeit der Energieabgabe auf der Wegeinheit, sofern er die freie Weglänge und damit die Stoßzahl der Teilchen beeinflussen kann.

Das tatsächliche Statthaben von Trägerbildung seitens atomistischer Strahlen bei Lineargeschwindigkeiten unterhalb der Grenzgeschwindigkeit der sekundären Kathodenstrahlung zeigt an, daß man den Vergleich des Verhaltens der verschiedenen Strahlen mit Vorteil, statt wie bisher auf gleiche Lineargeschwindigkeit, jetzt auf gleiche Energie bezieht. Für einen Vergleich dieser Art steht bis jetzt allerdings nur eine einzige (vorläufige) Beobachtung der Trägerbildung zur Verfügung[3]). Wir können ihr jedenfalls die Feststellung entnehmen, daß auch für atomistische Strahlen eine Grenzgeschwindigkeit

1) H. Geiger, Proc. Roy. Soc. A. **82**, 496, 1909; J. B. Johnson, Phys. Rev. **10**, 609, 1917.
2) H. Kulenkampff, Ann. d. Phys. **79**, 97, 1926.
3) A. Becker, Ann. d. Phys. **75**, 217, 1924; **78**, 228, 1925.

1) H. Baerwald, Ann. d. Phys. **65**, 167, 1921; vgl. auch R. Seeliger, Physik. Zeitschr. **12**, 839, 1911.
2) J. Koenigsberger u. J. Kutschewski, Heidelb. Akad. d. Wiss. A. **13**, 1910.
3) E. v. Bahr u. J. Franck, Verh. d. D. Phys. Ges. **16**, 57, 1914.

für die Trägerbildung besteht, welche, unserer Erwartung entsprechend, im Energiemaß dieselbe Größenordnung hat wie bei den Kathodenstrahlen, wenn ihre genaue Festlegung auch noch nicht gelungen ist. Wir erkennen ferner einen in beiden Fällen analogen Anstieg der erzeugten Trägerzahl mit wachsender Strahlenenergie, während wir allerdings noch darauf verzichten müssen, aus der sehr verschiedenen Steilheit des Anstiegs in beiden Fällen Schlüsse zu ziehen, da die beobachteten Trägermengen noch nicht mit genügender Sicherheit auf gleiche Teilchenzahl (und vielleicht auch nicht auf gleiche Teilchenenergie) zurückgeführt sind.

3. Daß bewegte Atome bzw. Moleküle einer bestimmten Mindestenergie für die Trägerbildung beim Zusammentreffen mit andern Atomen oder Molekülen bedürfen, folgt auch mit Notwendigkeit aus der Tatsache, daß ein Gas gewöhnlicher Temperatur ein Nichtleiter ist. Denn wir können auch hier alle bewegten Moleküle als Korpuskularstrahlenteilchen auffassen und müssen, den obigen Feststellungen entsprechend, erwarten, daß sie beim Zusammentreffen mit andren Molekülen zu Trägerbildung Anlaß geben können, sobald ihre Geschwindigkeit die Grenzgeschwindigkeit der Trägerbildung erreicht.

Messen wir die Molekulargeschwindigkeiten eines Gases im Voltmaß, d. h. durch diejenige Spannungsdifferenz in Volt, welche ein Molekül mit der Elementarladung von der Ruhe aus durchlaufen müßte, um seine augenblickliche Lineargeschwindigkeit gerade zu erlangen, so kommt für die Elektronenbefreiung aus einem im Gas ruhenden Körper nur der Bruchteil:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\bar{V}_0}^{\infty} \sqrt{V_0}\; e^{-\frac{\bar{V}_0}{2}} \cdot d\bar{V}_0 = 1 + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{\bar{V}_0}{2}}\; e^{-\frac{\bar{V}_0}{2}} - \Phi\left(\sqrt{\frac{\bar{V}_0}{2}}\right)$$

der vorhandenen Moleküle in Betracht[1]). Es ist hier mit V_0 die Grenzgeschwindigkeit im Voltmaß (Trägerbildungsspannung), mit $\bar{V}_0 = \frac{V_0}{V_W}$ ihr Verhältnis zur wahrscheinlichsten Voltgeschwindigkeit $V_W = 0{,}86 \times 10^{-4} \cdot \Theta$ des Gases und mit Θ dessen absolute Temperatur bezeichnet.

Für die Anzahl der aus den Atomen des betreffenden Körpers durch die Molekülstöße in der Zeiteinheit befreiten Elektronen ergibt sich hiernach

$$z = \text{const} \cdot \frac{V_0 + 1{,}72 \cdot 10^{-4} \cdot \Theta}{\sqrt{\Theta}} \cdot e^{-\frac{V_0}{1{,}72 \times 10^{-4} \cdot \Theta}}.$$

1) Vgl. A. Becker, Ann. d. Phys. **58**, 416, 1919.

falls wir annehmen, daß die „Wirksamkeit" aller überhaupt in Betracht kommenden Stöße gleich groß ist.

Unter der wahrscheinlicheren Annahme, daß die „Wirksamkeit" der Stöße proportional dem Überschuß der Molekulargeschwindigkeit über die Grenzgeschwindigkeit (beide im Voltmaß) zunehme, findet sich

$$z = \text{const} \cdot \sqrt{\Theta} \cdot (V_0 + 3{,}44 \cdot 10^{-4} \cdot \Theta) \cdot e^{-\frac{V_0}{1{,}72 \cdot 10^{-4} \cdot \Theta}}.$$

Der Temperaturgang von z ist in beiden Fällen nahe der gleiche, da für ihn weit überwiegend die in beiden Fällen auftretende gleiche Exponentialfunktion maßgebend ist. Da V_0 im allgemeinen einen Wert von mehreren Volt besitzt, so wird die Exponentialfunktion und damit auch z selbst, der Erfahrung entsprechend, bei gewöhnlicher Temperatur verschwindend klein, während bei hoher Temperatur rasch ansteigende Werte angezeigt werden.

Die erhaltenen Ausdrücke liefern, wie man erkennt, im wesentlichen nahe den gleichen Temperaturgang der Elektronenemission, wie er für die glühelektrische Wirkung bekannt ist. Dies deutet von einer neuen Seite und in Übereinstimmung mit unsrer, durch andre Feststellungen veranlaßten Auffassung[1]) an, daß es sehr wohl möglich ist, die thermische Elektronenemission durch den Austritt thermisch aus ihrem Atomverband befreiter — und nicht bereits ursprünglich freier — Elektronen zu deuten.

Zur Ermittlung der im Gasinnern erzeugten Anzahl von Trägerpaaren ist die Zahl derjenigen Zusammentreffen der Moleküle in Betracht zu ziehen, bei welchen, unsrer Voraussetzung entsprechend, Molekulargeschwindigkeiten über der Grenzgeschwindigkeit vorliegen. Von einer an sich durchführbaren strengen Berechnung dieses Falls wollen wir bis zum Vorliegen weiterer Erfahrung — aus zu dieser Frage bereits in Gang gesetzten erfolgreichen Versuchen[2]) mit elektrisch zerstäubtem Metall — absehen und uns mit einer ersten Näherungsbetrachtung begnügen. Eine solche liegt ohne weiteres vor, wenn wir die für den vorher angenommenen Fall streng geltenden Beziehungen auch für den gegenwärtigen Fall als gültig ansehen; denn sie entsprechen hier der Annahme einer gewissen Anzahl im Gase ruhender Moleküle einer Art, welche von bewegten Molekülen zweiter Art zur

1) A. Becker, Ann. d. Phys. **75**, 795, 1924.

2) Über einen ersten Versuch, thermische Trägerbildung in Gasen durch adiabatische Kompression derselben nachzuweisen, siehe O. Devik, Heidelb. Akad. d. Wiss. A. **24**, 1914; vgl. auch vierter Tätigkeitsbericht des Radiol. Instituts Heidelberg. Elektrot. Zeitschr. 1916, Heft 41.

Elektronenemission angeregt werden. Ein ähnlicher Ausdruck, insbesondere das Auftreten der e-Funktion oder einer ihr äquivalenten Funktion, ist auch bei strenger Herleitung zu erwarten, da in ihr die durch das Maxwellsche Verteilungsgesetz vorgeschriebene Änderung der für das Zusammentreffen in Betracht kommenden Teilchenzahl mit der Geschwindigkeit enthalten ist.

Die Aussagen dieser Beziehungen entsprechen ganz dem bekannten elektrischen Verhalten der heißen Gase, wie es in den Flammen zur Beobachtung kommt[1]). Sie zeigen die infolge relativ hohen V_0-Werts der Flammenmoleküle geringe Trägerbildung in „reinen" Flammen, die starke Steigerung der Trägerbildung durch Einführen eines Metalldampfs, dessen Atomen ein geringerer V_0-Wert zukommt, und schließlich die sehr starke Temperaturabhängigkeit der Flammenleitung.

1) Vgl. A. Becker, „Flammenleitung" im Graetzschen Handbuch d. Elektr. u. d. Magn. III, 441, 1919.

Marie Anna Schirmann (Wien), Die Erzeugung extremster Vakua durch erkaltende hocherhitzbare Metalle als Sorbentien (speziell Wolfram).

Extremvakua sind Hochvakua, deren Drucke tief unter den Drucken der bestgepumpten technischen Elektronenröhren liegen. Durch unsere modernen Quecksilberdampfhochvakuumpumpen[1]) im Verein mit Ausfriermitteln für die Quecksilberdämpfe einerseits und durch den erreichbaren hohen Entgasungsgrad der Apparatur durch elektrodenlose hochgespannte Entladungen infolge geeigneten Ionenbombardements[1]) andererseits ist, abgesehen vom Rohrleitungswiderstand der Erreichung extrem niedriger Totaldrucke bloß durch die Dampftension der festen Bestandteile im Rezipienten (festes Quecksilber in der Ausfrierfalle, glühender Wolframfaden usw.) eine Grenze gesetzt. Da festes Quecksilber bei Zimmertemperatur eine Dampfspannung von nur 10^{-27} mm Hg hat, der Dampfdruck des Wolframs bei der normalen Glühtemperatur von etwa 2000° C aber 10^{-11} mm Hg beträgt, so ist es für die Erzielung von Totaldrucken, die kleiner als 10^{-11} mm Hg sein sollen, notwendig, entweder glühendes Wolfram im Rezipienten ganz zu vermeiden oder, da dies bei dem eigentlichen Zweck der Elektronenröhren nicht möglich ist, auf niedrigere Glühtemperaturen herabzugehen.

1) M. A. Schirmann, Physik. Zeitschr. 25, 631, 1924.

Für die Verbesserung extremer Vakua mit Hilfe von metallischen Sorbentien speziell des Wolframs sollen daher aus Gründen der Erzielung niedrigen Totaldruckes Wolframfäden nicht in weißglühendem Zustand durch chemische Reaktion des Glühfadens bzw. des verdampfenden oder zerstäubenden Wolframs mit den Restgasen die gasbindende Wirkung ausüben, sondern im erkaltenden Zustand durch bloßen reversiblen Sorptionsprozeß (Adsorption, Absorption, Okklusion). Wie in hochevakuierten Rezipienten extremste Hochvakua durch Erkalten hocherhitzbarer „aktivierter" Metalle speziell „aktivierten" Wolframs als Sorbens erzeugt werden können, soll im folgenden dargelegt werden.

Nicht von der Leistung der Sorption in gewöhnlichen Vorvakua (bei 10^{-3} mm Hg) im Wetteifer mit den Pumpen, sondern von der hochvakuumverbessernden Wirkung der Sorption bei extrem niedrigen Gasdrucken soll hier überhaupt die Rede sein. Dieser Wirksamkeitsbereich der Sorption kommt hauptsächlich während bzw. nach dem Abstechvorgang von der Pumpanlage in Betracht. Wenn es auch möglich ist, den Rezipienten durch ein großgewähltes Verhältnis der Strömungswiderstände für die aus der Abstechstelle beim Abschmelzen freigewordenen Restgase einerseits gegen den Rezipienten andererseits gegen die Pumpanlage vor dem Eindringen wesentlicher Gasmengen zu sichern[1]), so genügen doch schon die geringsten Gasspuren zur Vereitelung extrem hoher Vakua.

Welche Stoffe wirken als Sorbentien im genannten Sinne und durch welche physikalische bzw. chemische oder physikalisch-chemische Vorgänge werden die Restgase gebunden?

Die Adsorptionsaktivität ist nicht — wie noch vielfach angenommen wird — eine spezifische Eigenschaft einiger weniger bevorzugter Substanzen wie Kohle, Watte, Wolle, also lockerer poröser Körper, wohingegen die Metalle (vielleicht mit Ausnahme von Platinmoor und Palladiumschwamm) ganz unbrauchbare Adsorbentien sein sollen, sondern sie ist eine Oberflächenerscheinung und darum ist zu ihrer Bestimmung die Kenntnis der Größe der adsorbierenden Oberfläche notwendig. Also Adsorptionsaktivität ist somit die Menge des adsorbierten Stoffes pro cm² der adsorbierenden Oberfläche. Von diesem Standpunkt aus sind solche lockeren porösen Körper, wie Watte und Wolle, die schlechtesten Adsorbentien, während gerade harte Metalle die am meisten aktiven Adsorbentien darstellen.

Die Bindung der Restgase wie O_2, N_2, am häufigsten H_2 usw. im Hochvakuum kann durch

1) M. A. Schirmann, Physik. Zeitschr. 27, 659, 1926.

rein physikalische Vorgänge wie Adsorption, Absorption und Okklusion, also durch reversible Prozesse geschehen oder durch chemische bzw. elektrochemische Vorgänge wie Chemisorption und Elektrochemisorption, also durch irreversible Prozesse. Bei den rein mechanischen Bindungen der Restgase z. B. ganz verläßlich bei Wasserstoff durch Metalle verschiedenster Art mit Ausnahme von Platinmoor und Palladiumschwamm, konnte bisnun — sofern es sich nicht um eine Art „Aktivierung" der Metalle, wie natürlicherweise bei Platinmoor und Palladiumschwamm, handelt — sowohl durch mechanische Sorptionsversuche in Anwesenheit der betreffenden Gase als auch durch Entgasungsversuche im Hochvakuum auf keine nennenswert großen aufgesaugten Gasmengen geschlossen werden.

Die größten Restgasmengen werden — wie bisher bekannt — nur durch chemische und elektrochemische Aufzehrung der Gase gebunden. Bei bloßer Zuführung von thermischer Energie in den Rezipienten können die dort noch vorhandenen Restgase (außer mechanisch) noch chemisch reagieren: 1. mit den verdampfenden festen Bestandteilen, 2. mit den erhitzten Teilen selbst (z. B. Glühkathode), 3. mit den kalten Teilen (z. B. Gefäßwände und Anode) und 4. mit den aus den erwärmten Teilen freiwerdenden Gasen. Beim Einbringen des Rezipienten in ein elektrisches Feld und Durchgang einer elektrischen Entladung durch denselben tritt neben der zusätzlichen Erwärmung) noch durch die entstehende Ionisierung die Elektrosorption auf: 1. Reagieren die ionisierten Dämpfe und Gase chemisch viel heftiger als die nicht ionisierten und 2. können die im elektrischen Felde mit verschiedenen und sehr hohen Geschwindigkeiten bewegten Gasionen beim Auftreffen auf die festen Teile des Rezipienten sehr tief eindringen und daher nicht bloß an der Oberfläche, sondern auch unter derselben reagieren. Am bekanntesten ist die sogenannte „Getterwirkung", welche durch Einbringen von gewissen Stoffen zur Förderung der Aufzehrung von Restgasen in den Rezipienten wie z. B. Phosphor, die Alkalimetalle, die Metalle der seltenen Erden usw. hervorgerufen wird. Diese „Getter" werden verdampft, im elektrischen Felde ionisiert und wesentlich beschleunigt, und sind so imstande, besondere Reaktionen mechanischer und chemischer Art mit den Restgasen einzugehen. Die durch die verschiedensten Gasaufzehrungsvorgänge entstandenen Reaktionsprodukte können dann selbst wieder Sorbentien sein.

Als „Getterwirkung" kann zum Teil auch die Erscheinung der Gasaufzehrung in Glühlampen und Glühkathodenröhren mit Wolfram-Heizfaden ohne speziell eingebrachte Aufzehrungsreagentien angesprochen werden. Hier ist es außer der Reaktionsfähigkeit des Wolframdampfes auch die des kalten Wolfram-Verdampfungs- bzw. Zerstäubungsniederschlages, der entgast und aktiv bei den geringen Gasdrucken noch nicht mit dem vorhandenen Gas abgesättigt ist.

Da die vorliegende Untersuchung von physikalischen, also reversiblen Sorptionsvorgängen von Restgasen in hohen Vakua vermittels „aktivierter" erkaltender Wolframglühfäden handelt, so soll demgegenüber vorher die chemische Beseitigung der Restgase durch glühende Wolframfäden gegenübergestellt werden. Bei Vorhandensein von O_2-Restgas tritt um so schneller bei hohen Temperaturen durch chemische Verbindung des Wolframs mit dem Sauerstoff zu Wolframtrioxyd (WO_3), welches bei den niedrigen Drucken bereits oberhalb 925° C vom Faden abdestilliert, die Beseitigung von Sauerstoff durch den Wolframfaden ein, doch ist die mit dieser Methode erreichbare untere Druckgrenze bloß 10^{-6} mm *Hg*. Bei Aufzehrung von N_2-Restgas bildet sich eine chemische Verbindung zwischen den vom Faden verdampfenden Wolframatomen und den Stickstoffmolekülen zu Wolframnitrid (WN_2); diese Stickstoff-Restgasbeseitigung ist proportional der Wolframverdampfung, also der Temperatur, doch wegen der zunehmenden Seltenheit der Zusammenstöße zwischen den Wolframatomen und den Stickstoffmolekülen nur bis Grenzdrucke von 10^{-3} mm *Hg* wirksam. Ähnliches gilt für die Gasdruckerniedrigung durch glühende Wolframfäden bei *CO*-Restgas durch Bildung von *WCO* bei Zimmertemperatur.

Die bei Entgasung der Gefäßwände in besonderem Maße nach der Methode der elektrodenlosen elektrischen Entladungen durch Ionenbombardement (z. B. von Quecksilberdampfionen) in ganz kurzer Zeit im Vakuum freigemachten großen Mengen von im Glase gebundenem primären Wasserstoff bzw. von dem aus dem Wasserdampf unter den gegebenen Bedingungen abgespaltenen sekundären Wasserstoff spülen die Mannigfaltigkeit der Restgase binnen kurzem nach der Pumpanlage fort, so daß als Restgas nach erfolgter Entgasung der Glaswände wesentlich nur mehr Wasserstoff in Betracht kommt. Glühende Wolframfäden vermögen nun bei Glühtemperatur über 1025° C (bei Drucken von $1 \cdot 10^{-3} - 1 \cdot 10^{-2}$ mm *Hg*) einen Teil des Restgas-Wasserstoffes zu einatomigem, also aktivem Wasserstoff zu dissoziieren, der bei Zimmertemperatur und in noch weit größerem Maße bei sehr tiefen Temperaturen sehr leicht von entgasten Glasoberflächen adsorbiert wird; doch ist dieser Art von Aufzehrung dadurch

bald eine Grenze gesetzt, daß die Wasserstoffatome bei gegenseitiger Berührung selbst noch bei sehr tiefen Temperaturen wieder leicht Wasserstoffmoleküle bilden. Dadurch wie durch das Auftreten von Ermüdungseffekten hat auch diese Wasserstoffaufsaugung aus dem Vakuum wenig praktischen Erfolg.

Im Gegensatz zu der eben besprochenen chemischen Beseitigung von Restgasen (speziell von Wasserstoff) durch glühende Wolframfäden soll im folgenden die physikalische Gasaufzehrungsmethode durch erkaltende vorher „aktivierte" Wolframfäden sowie deren „Aktivierungsprozeß" erörtert werden. Daß keine Verwechslung mit chemischen Aufzehrungsvorgängen vorliegen kann, beweist einerseits die Reversibilität der Vorgänge, andererseits der Umstand, daß — wie die folgenden Resultate zeigen — im Glühzustande des Wolframsfadens vor oder auch nach der „Aktivierung" nur ein relativ schlechtes Hochvakuum herrscht, wohingegen beim langsamen Erkaltenlassen des Glühfadens auf Zimmertemperatur extrem niedrige Drucke erzielbar sind.

Der „Aktivierungsvorgang" des Wolframfadens ist ebenfalls ein physikalischer und der ihm zugrunde liegende Gedanke ist der, dem viel wirksameren, weil besser entgasbaren Wolfram in Fadenform künstlich eine ähnliche Struktur zu verleihen wie die der Kohle, des Platinmoors, des Palladiumschwamms usw., ohne dabei den Faden allzu brüchig zu machen.

Analog den Kennzeichen aktiver Holzkohle wie Feinkörnigkeit, hohe Porosität, Fehlen adsorbierter Kohlenwasserstoffe und Vorhandensein amorpher Kohle als Grundsubstanz gelten auch für aktive Wolframfäden folgende Merkmale: 1. Feinkörnigkeit der Kristallite, 2. hohe Porosität, d. i. regelmäßige Verteilung der Wolframkristallite in der Bindemittel-Zwischensubstanz bzw. ein feines Netz von Spalten zwischen den Kristalliten, also Strukturbedingungen, 3. Fehlen adsorbierter, absorbierter oder okkludierter Gase und 4. Vorhandensein reiner Metalloberflächen, also Entgasungs- bzw. Reinheitsbedingungen.

Nun ist das Wolfram, bis es durch verschiedene Herstellungsverfahren zum fertigen Faden wird, bereits teilweise „aktiviert". Da sich reines Wolframmetall nicht derart schmelzen läßt, daß das Schmelzgut eine leicht zu bearbeitende Masse bildet, so wird bekanntlich äußerst feines kristallines Wolframpulver mit irgendeinem Bindemittel (z. B. Thoriumhydroxyd) versetzt, zu Fäden gepreßt und dann, je nach dem Herstellungsverfahren, in einer Schutzatmosphäre (meist Wasserstoff) gesintert bzw. gehämmert. Nach dem Einbau des so vorbereiteten Wolframfadens in den Hochvakuumrezipienten erfolgt die Entgasung desselben durch wiederholtes, durch Pausen unterbrochenes langsames Erhitzen des Fadens bis auf höhere Glühgrade und darauffolgendes langsames Abkühlen[1]). Durch diese beiden Prozesse, der Sinterung in der Schutzgasatmosphäre einerseits und der Entgasung andererseits wird den erwähnten 4 Bedingungen für die Aktivierung des Wolframfadens zur mechanischen Restgasaufzehrung im extremen Vakuum vollauf Genüge getan. Während des Sinterungsprozesses in der Schutzgasatmosphäre tritt der Rekristallisationsprozeß ein; die Größe der einzelnen Kristallite hängt dabei von der Erwärmungsgeschwindigkeit ab. Bei der Herstellung von normalem Drahtmaterial (nicht von Einkristalldraht), entsteht durch das gewöhnliche Glühen, d. i. langsamer Temperaturanstieg auf nicht zu hohe Endtemperatur, regelmäßige Rekristallisation und zwar wachsen kleine Kristallite im Faden, wodurch den Bedingungen 1 und 2 vollauf entsprochen wird. Während der Entgasung des Fadens im Hochvakuum durch wiederholtes, durch Pausen unterbrochenes langsames Erhitzen des Fadens bis auf höhere Temperaturen und darauffolgendes langsames Abkühlen diffundieren die mechanisch gebundenen Gase langsam durch die Zwischensubstanz bzw. durch die Kristallitspalten sowie Hohlräume aus dem Drahtverbande, ohne daß es zu einer wesentlichen Zerstäubung durch Abschleudern von Wolframpartikeln durch die aus dem Faden explodierenden Gase kommt. Da wegen Bedingung 1, 2 und 3 keine Voraussetzungen für mechanische Zerstäubung bei derart aktivierten Wolframfäden gegeben sind, so können auch keine Gassorptionsvorgänge durch Zerstäubungsniederschläge die Resultate dieser neuen Methode fälschen.

Der „Aktivierungsprozeß" gliedert sich also in die Strukturvorbereitung und in die Entgasung, wobei während letzterer durch wiederholte entsprechend langsame Temperaturregulierung weder die Feinkörnigkeit der Kristallite noch die hohe Porosität leiden, während bei raschem Temperaturanstieg auf hohe Temperaturen mit starken Verschiebungen und Verschweißungen der bereits ziemlich plastischen Wolframkristalle gerechnet werden muß. Durch das in regelmäßigen Zeitabständen wiederholte Glühen und Erkaltenlassen des Fadens wird einerseits das Verdampfen des Wolframs auf ein Minimum herabgesetzt, andererseits das Gefüge nur noch poröser gemacht.

Bei Ingebrauchnahme des aktivierten Wol-

1) Versuche über die Entgasung bzw. „Aktivierung" von dünnen Glühfäden durch die eingangs erwähnten elektrodenlosen hochgespannten Entladungen infolge Ionenbombardements sind vor dem Abschluß.

framfadens zwecks Verbesserung hoher Vakua zu Extremvakuis wird der normal glühende Faden zum letztenmal sehr langsam erkalten gelassen. Das Sorptionsvermögen der nach der genannten Methode aktivierten Wolframfäden ist beim Erkalten so enorm hoch, daß die letzten freien Gasmoleküle in den langsam erkaltenden Draht aufgenommen werden; auch noch nach Erreichung der Zimmertemperatur saugt der Faden in das weitverzweigte Netz seiner Kristallitspalten die letzten Restgase ein. Somit kann man von einem entgasten Glühfaden schlechtweg nur in heißem Zustande sprechen. Während festes Wolfram nach Langmuir[1]) bei niedrigen Drucken ein verhältnismäßig geringes Okklusionsvermögen hat, verhält sich das nach der neuen Methode aktivierte Wolfram bezüglich Adsorption wegen der besseren Entgasbarkeit besser als Platinmoor oder Palladiumschwamm und wegen der spezifisch höheren Adsorptionsaktivität der harten Metalle besser als bestaktivierte Kohle. Die Art der Sorption dürfte daher auch größtenteils Adsorption auf der vergrößerten Oberfläche sein. Da bei Wiederglühen eines bereits mit den Restgasen angereicherten Wolframfadens der größte Teil der sorbierten Restgasmenge wieder an das Hochvakuum abgegeben wird, so ist der Sorptionsvorgang im Glühfaden ein reversibler, also ein physikalischer. Inwieweit hier eventuell auch die Bindemittelrestsubstanz oder das Thoriumoxyd im Faden an der Sorption beteiligt ist, läßt sich vorläufig nicht übersehen, ist aber jedenfalls auch physikalischer Natur.

Zum Schluß noch ein Überblick über Sorptionsresultate im Innern einer 25-kerzigen Wolframdraht-Glühbirne als Rezipienten durch eine weitverzweigte Leitung am Hochvakuumpumpensystem angeschlossen. Der Wolframfaden war voraktiviert; die Entgasung des Rezipienten geschah durch Entladung mittels kapazitiver Außenelektroden durch Quecksilberdampfionenbombardement und wurde absichtlich nicht zu weit getrieben. Sodann erfolgte die Weiteraktivierung und damit auch die Entgasung des Glühfadens durch Heizung mittels Gleichstrom und zwar durch wiederholtes langsames Anheizen auf Glühtemperatur und langsames Abkühlen auf Zimmertemperatur innerhalb regelmäßiger Zeitabstände. Die Glühdauer betrug einige Sekunden bis einige Minuten, die Kühldauer immer mehrere Minuten. Während die Restgasdrucke vor den Glüh- und Abkühlungsserien bei dem vorgegebenen Leitungswiderstand und Entgasungsgrad 10^{-8} mm *Hg* betrugen, gingen die Drucke während des Glühens durch die Entgasung des Fadens auf 10^{-4} — 10^{-5} mm *Hg* hinauf, während der Kühlpausen bei der Aktivierung auf 10^{-8}, 10^{-9} und 10^{-10} mm *Hg* hinunter[1]). Nach Erreichung dieses letzten Druckwertes blieb der Faden nach seinem Erkalten nunmehr ständig auf Zimmertemperatur und der so in seinem Vakuum um mindestens zwei Zehnerpotenzen verbesserte Rezipient konnte abgeschlossen werden. Bei Wahl besserer Vorbedingungen werden sich auf diesem neuen Wege noch bessere Extremvakua erzielen lassen.

Wie die Änderung des Widerstandes[2]) bzw. die Glühemission des *W*-Glühfadens beim Absorptionsmanometer zeigt, konnte die Restgasmenge nur im Wolframglühfaden aufgenommen worden sein.

Die chemische und elektrochemische Restgasaufzehrung zur Verbesserung des Hochvakuums ist sehr problematischer Natur, da die neugebildeten chemischen Verbindungen sehr oft höhere Dampfdrucke gaben als erwünscht ist. Daher genießt die physikalische Restgasaufzehrung überhaupt den Vorzug; diese wird aber nur möglich gemacht durch eingehendes Studium und Untersuchungen über die Aktivierung von harten Metallen. Und dazu seien die vorliegenden Resultate an Wolframfäden ein kleiner Beitrag.

1) Die niedrigen Gasdrucke wurden mit dem Ionisations- bzw. Adsorptionsmanometer gemessen.

2) Ähnliche Beobachtungen sind auch bei mehreren von mir im h. o. Institute angeregten Untersuchungen über Leitfähigkeitsänderungen bei Platindraht (H. Kleine, Zeitschr. f. Phys. **33**, 405, 1925), Palladiumdraht usw. vorhanden.

Wien, III. physikalisches Institut der Universität.

1) Langmuir, Zeitschr. f. Elektrochem. **20**, 498, 1914.

H. Opitz (Berlin), Über eine optische Täuschung in ihrer Abhängigkeit vom monokularen und binokularen Sehen.

Bei jeder Gesichtswahrnehmung sind drei Vorgänge zu unterscheiden: 1. der extraokulare Vorgang, d. i. die Fortpflanzung des Lichtes von der Lichtquelle bis zu seinem Auftreffen auf die Hornhaut; 2. der intraokulare Vorgang, nämlich die Brechung der Strahlenbündel im Auge bis zur Erzeugung eines Bildes auf der Netzhaut; und 3. die Reizung des Sehnervenapparates und die Fortpflanzung des Reizes durch den Sehnerv zum Gehirn.

Über den dritten Vorgang wissen wir am wenigsten, denn von einem naturwissenschaftlichen Verständnis der psychischen Erscheinungen sind wir noch weit entfernt. Die Aufklärung der Brechung der Lichtstrahlenbündel im Auge

aber ist uns durch die Erfolge, welche die Ophthalmologie errungen hat, insbesondere durch die schönen Untersuchungen von A. Gullstrand über den Astigmatismus, schon sehr nahe gerückt. Den ersten Vorgang endlich, die Fortpflanzung des Lichtes bis zum Auge, be-

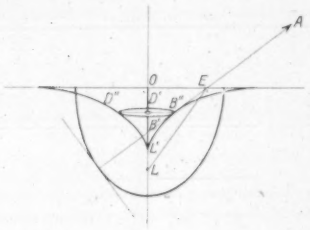


Fig. 1.

herrschen wir am vollkommensten dank der Ausbildung, welche die geometrische und die physikalische Optik bis heute erfahren haben.

Nach den Untersuchungen Gullstrands nun wird jedes homozentrische Strahlenbündel durch den optischen Apparat des Auges in ein astigmatisches umgewandelt, welches eine Symmetrie-Ebene und damit eine in dieser Ebene

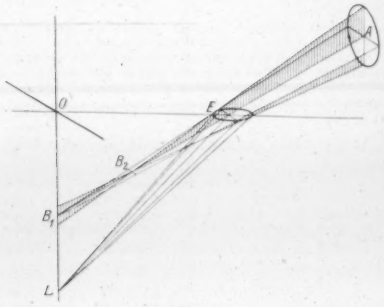


Fig. 2.

gelegene gerade Brennlinie besitzt, die jedoch im allgemeinen einen spitzen Winkel mit dem Leitstrahl des Bündels bildet. Die Abbildung eines leuchtenden Punktes auf der Netzhaut wird also zur Wahrnehmung eines eindeutigen Bildes führen, da der Fokalabstand sehr gering ist (0,03 mm). Es können aber auch Lichtstrahlenbündel, welche schon vor Eintritt in die Cornea astigmatisch waren, im Auge zur Brechung kommen. Dann wird die Frage nach dem Bilde eine kompliziertere, denn es ist zu entscheiden, welche der beiden Fokallinien des gegebenen astigmatischen Strahlenbündels für die Wahrnehmung des Bildes maßgebend ist.

Man kann ein astigmatisches Strahlenbündel der zweiten Art (nach der Systematik Gullstrands) durch Refraktion eines homozentrischen Strahlenbündels an der ebenen Grenzfläche zweier durchsichtigen Mittel von verschiedener optischer Dichte leicht erzeugen. (Fig. 2.) Man tauche einen Stab lotrecht in ein Gefäß mit Wasser. Betrachtet man den Stab, der im Wasser nur verkürzt erscheint, zuerst mit einem und darauf mit beiden Augen, so ist die Täuschung der

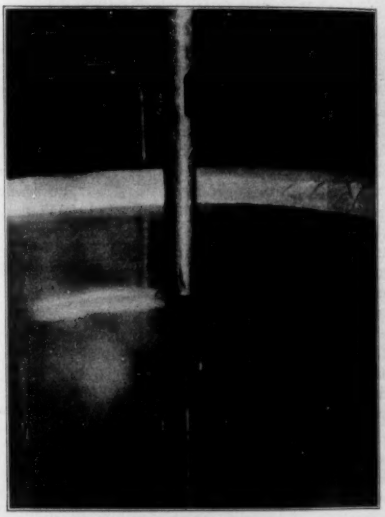


Fig. 3.

Verkürzung in jedem Falle dieselbe. Jetzt neige man den Stab, die Eintauchstelle beibehaltend, in der durch ihn und das Auge bestimmten lotrechten Ebene mit dem oberen Ende vom Beobachter weg, so bemerkt man bei monokularem Sehen keine Veränderung in der Erscheinung des Stabes, insbesondere keinen Knick an der Eintauchstelle, nur erscheint er länger. Erst wenn man das zweite Auge öffnet, zeigt sich ein Knick, der Stab erscheint an der Wasseroberfläche gebrochen, indem der im Wasser befindliche Teil gleichsam mit einer Drehung um die Eintauchstelle auf den Beobachter hin sich zu bewegen scheint, so daß das Stabende höher als vorher lokalisiert ist.

Zur Erklärung dieser Erscheinung hat man sich daran zu erinnern, daß alle von dem End-

punkte des Stabes in das Auge gelangenden Strahlen als Normalen eines Rotationsellipsoides oder als gemeinsame Tangenten der beiden diakaustischen Flächen (Fig. 1) aufzufassen sind. Die letzteren bestehen in diesem Falle einerseits in einem Teile der Drehungsachse des Ellipsoids, andererseits werden sie gebildet aus der Rotationsfläche, welche zur Meridiankurve die Evolute der Meridianellipse jenes Ellipsoids hat. Das ins Auge gelangende astigmatische Strahlenbündel (Fig. 2) hat zwei Brennlinien, wovon die

Fig. 4.

der Evolutenfläche angehörige senkrecht zum Leitstrahl des Bündels steht, während die andere ein Element der Rotationsachse ist, welches schief zum Leitstrahl verläuft. Im Meridionalschnitt des Bündels wird der Leitstrahl an der einen Fokalstelle B'' nur von zwei Strahlen geschnitten, im Sagittalschnitt dagegen, an der anderen Fokalstelle B', von unendlich vielen. Da die astigmatische Differenz verhältnismäßig groß ist, so müßte bei lotrecht stehendem Stabe in Hinsicht auf B'' (Fig. 1) ein scheinbarer Knick an der Eintauchstelle ebenfalls entstehen, wenn man vom monokularen zum binokularen Sehen übergeht. Das geschieht aber nicht. Demnach ist der Schluß gerechtfertigt, daß das Auge den Ort des leuchtenden Punktes L an die Stelle B' versetzt, d. h. es findet bei der Brechung eines homozentrischen Strahlenbündels an einer Ebene nur eine scheinbare Hebung statt. Diese scheinbare Hebung kann sich bei monokularer Betrachtung nicht zeigen, weil bekanntlich ein Auge nur durch den Akkommodationsmechanismus allenfalls verschiedene Tiefenwahrnehmungen machen könnte. Das Auge hat sich aber in diesem Falle dazu als unfähig erwiesen, wohl deshalb, weil die astigmatische Differenz für die Akkommodation nicht groß genug ist. Erst bei binokularer Betrachtung des Stabes konnte es gelingen, den scheinbaren Knick an der Eintauchstelle zu beobachten. Auch die Gewöhnung wirkt hierbei nicht, denn bei abermaligem Schließen des zweiten Auges wird der

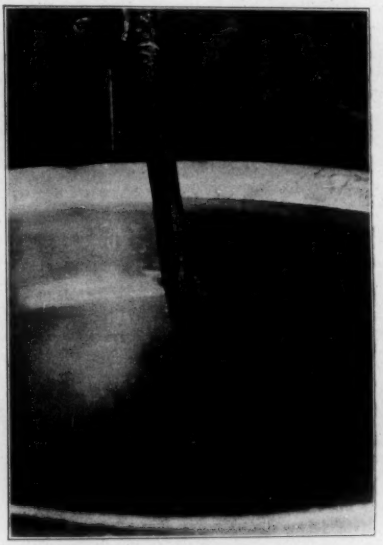


Fig. 5.

Knick wieder unwahrnehmbar. Erwähnenswert wäre noch, daß der in der Medianebene des Kopfes befindliche Stab die Erscheinung für das binokulare Sehen nicht ändert.

Die optische Täuschung für monokulares Sehen läßt sich demonstrieren mittels einer photographischen Kamera, da diese das Auge wohl annähernd zu ersetzen vermag. Ich habe drei Aufnahmen machen lassen, nämlich für den lotrechten und den schräg eingetauchten Stab (Fig. 3 und 4), wobei der Apparat stets scharf auf die Eintauchstelle gerichtet worden

ist. Im zweiten Falle mußte das eingetauchte Ende wegen der größer werdenden Sehwinkel nach unten zu allmählich dicker werdend erscheinen. Der Knick an der Oberfläche war nicht zu bemerken. Drittens habe ich die Kamera seitlich etwas verschieben lassen. Dann mußte der Stab gebrochen erscheinen (Fig. 5). Zu bemerken wäre dazu noch, daß in jedem Falle nur eine scharfe Einstellung zu erhalten war.

Analytische Behandlung.

1. Die astigmatische Differenz in ihrer Abhängigkeit vom Brechungsexponenten n und dem Winkel α, den die Sehachse mit der Vertikallinie bildet, hat zum Ausdruck:

$$B'B'' = \frac{n\,(1 - n^2)\sin^2\alpha}{\sqrt{1 - n^2\sin^2\alpha^3}},$$

wenn dabei als Längeneinheit der Abstand des leuchtenden Punktes L von der brechenden Ebene genommen wird. In Fig. 1 ist gewählt worden: $n = 0{,}75$ und $\alpha = 55^0$. Dann ist die astigmatische Differenz

$$\triangle = B'B'' = 0{,}4482.$$

Für $OL = 4$ cm ist $\triangle = 1{,}8$ cm. Für den Stab der Photographie war $OL = 12$ cm. Bei gleichen Werten n und α würde $\triangle = 5{,}4$ cm sein.

2. Die Entfernung OB' des Fokalpunktes B' von der brechenden Ebene hat bei gleichem Maße den Wert:

$$OB' = \frac{n\cos\alpha}{\sqrt{1 - n^2\sin^2\alpha}}.$$

Die Rechnung ergibt hierfür 0,5452, also für $OL = 4$ cm $\cdot$ 2,18 cm, und für $OL = 12$ cm: 6,54 cm.

Der lotrechte Stab müßte, wenn L in B'' erscheinen sollte, den Winkel 128° am Knick zeigen, d. i. ein Winkel, der zweifellos zu bemerken sein würde, wenn die Erscheinung in dieser Weise stattfände. —

Zusammenfassung.

1. Die behandelte durch ein astigmatisches Strahlenbündel zweiter Art vermittelte optische Täuschung hängt in der Art ihrer Wahrnehmung wesentlich von dem Gebrauch eines oder beider Augen beim Sehen ab.

2. Ein in das Auge fallendes astigmatisches Strahlenbündel mit zwei Brennlinien, wovon die eine senkrecht zum Leitstrahl dem Sagittalschnitt, die andere schief dazu dem Meridionalschnitt angehört, bringt nur die letztere zum Bewußtsein des Beobachters. —

BESPRECHUNGEN.

E. Hoppe, Geschichte der Physik. Gr.-8°. VIII u. 536 S. Braunschweig, Friedr. Vieweg & Sohn A. G. 1926. M. 30.—, geb. M. 33.—.

„Geschichte der Physik, nicht Geschichte der Physiker, auch nicht Geschichte der naturphilosophischen Anschauungen nenne ich dieses Buch. Wohl gibt es in den verschiedenen Zeitabschnitten mehr oder weniger vorherrschende Gesamtideen in der Physik, aber sie sind nur fruchtbar gewesen, soweit sie aus den Forschungsergebnissen über die Einzelprobleme hervorgegangen sind. Diese Einzelprobleme müssen konstitutiv sein für die Gesamtanschauung. Sie aber haben eine Geschichte! Und die Geschichte dieser Probleme ist es, die ich darzustellen suche."

Also: die Tatsachen der Physik und ihre Zusammenfassungen in den großen Prinzipien und Theorien, nicht ihre mehr oder weniger willkürlichen, philosophischen Deutungen sollen dem Leser vorgeführt werden. Während Ernst Mach und Pierre Duhem in ihren historischen Schriften eine aufklärende Tendenz verfolgen und unser allzu sicheres Vertrauen in unsere Schulweisheit zu erschüttern suchen, indem sie zeigen, wie sich dieses Wissen im Lauf der Zeiten geändert hat, — ist es Hoppe darum zu tun, die gesicherten, d. s. die heute geltenden Resultate der Physik möglichst vollständig zu registrieren und zeitlich zu ordnen. Fast durchwegs sind die Originalquellen zitiert. Das Buch umfaßt in der Hauptsache die Zeit vom Ende des 16. Jahrhunderts bis zum Jahre 1805, nebst einer kurzen Einleitung über die griechische und die mittelalterliche Physik.

Heinrich Löwy.

Personalien.

(Der Herausgeber bittet die Herren Fachgenossen, der Schriftleitung von eintretenden Änderungen möglichst bald Mitteilung zu machen.)

Ernannt: Der ord. Professor der Experimentalphysik an der Universität Innsbruck Dr. Egon Schweidler in gleicher Eigenschaft an der Universität Wien, der Privatdozent für Physik an der Universität Freiburg i. B. Dr. Wilhelm Hammer zum a. o. Professor ebenda, der Privatdozent der Geophysik an der Universität Frankfurt Dr. Beno Gutenberg zum nichtbeamteten a. o. Professor ebenda, der Abteilungsvorsteher am Geodätischen Institut in Potsdam Professor Dr. Gustav Angenheister zum Honorarprofessor (mit Auftrag zum Abhalten von Vorlesungen und Übungen über Geophysik) an der Technischen Hochschule Berlin.

Lehrauftrag: Der Privatdozent für physikalische Chemie an der Bergakademie Clausthal Dr. K. Kellermann, Auftrag zur Vertretung des etatsmäßigen Extraordinariats an der Universität Jena.

Ehrung: Dem ord. Professor der Physik an der Technischen Hochschule München Geheimrat Dr. J. Zenneck wurde die Goldene Heinrich-Hertz-Medaille zur Förderung des Funkwesens verliehen.

Für die Schriftleitung verantwortlich Prof. Dr. F. Harms in Würzburg. — Verlag von S. Hirzel in Leipzig.
Druck von August Pries in Leipzig.